MTM3422 - Álgebra Linear II
Terceira Lista

1. Mostre que uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é *ortogonal* se e somente se $Q^{-1} = Q^\top$.

2. Seja $S = \{(x, y, z) \mid x = z\}$ subespaço de $\mathbb{R}^3$ com produto interno
$$\langle u, v\rangle = 2xx' + 3yy' + 4zz',$$
onde $u = (x, y, z)$ e $v = (x', y', z')$. Determine $S^\perp$.

3. Seja X um espaço real de dimensão finita com produto interno e S um subconjunto não-vazio de X. Mostre que
$$S^{\perp\perp} = \operatorname{span} S.$$

4. Seja X um espaço real de dimensão finita com produto interno e V, W subespaços vetoriais de X. Mostre que
$$(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp, \qquad (V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp.$$

5. Sejam S e W os subespaços de $\mathbb{R}^{n\times n}$ formados pelas matrizes simétricas e antisimétricas, respectivamente. Considere $\mathbb{R}^{n\times n}$ munido com o produto interno
$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}\ ,$$
onde $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Mostre que $W = S^\perp$.

6. Em cada item, calcule a fatoração $A = QR$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

7. Encontre a solução de quadrados mínimos para $Ax = b$ em que
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$
Dica: Calcule e use a fatoração QR de A.

8. Para $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mostre que
$$(Ax)\cdot y = x \cdot (A^\top y) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^m,$$
onde $A^\top \in \mathbb{R}^{n\times m}$ denota a matriz trasposta de A.

9. Para $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mostre que $N(A^\top A) = N(A)$. Use esse fato para concluir que, para qualquer $b \in \mathbb{R}^m$, tem-se $A^\top b \in C(A^\top A)$, isto é, que existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$A^\top Ax = A^\top b.$$

10. Sejam X, Y e Z espaços reais de dimensão finita com produto interno. Sejam $A, B\colon X \to Y$ e $C\colon Z \to X$ transformações lineares e λ um escalar. Mostre que

    (a) $(A + B)^* = A^* + B^*$

    (b) $(\lambda A)^* = \lambda A^*$

    (c) $(BC)^* = C^*B^*$

    (d) $A^{**} = A$

Gabarito Parcial

1 $S^\perp = \text{span}\,\{(-2,0,1)\}$

6 (a) $Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$

(b) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

7 $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = (-2/5, 0, 1)$