MTM3422 - Álgebra Linear II
Quarta Lista

1. Sejam X, Y e Z espaços reais de dimensão finita com produto interno. Sejam $A, B\colon X \to Y$ e $C\colon Z \to X$ transformações lineares e λ um escalar. Mostre que

   (a) $(A+B)^* = A^* + B^*$

   (b) $(\lambda A)^* = \lambda A^*$

   (c) $(BC)^* = C^* B^*$

   (d) $A^{**} = A$

2. Seja X um espaço de dimensão finita com produto interno e $A\colon X \to X$ a transformação linear definida por $Av = \langle v, a\rangle b$, onde $a, b \in X$. Mostre que A^* é dada por $A^*w = \langle w, b\rangle a$ (para todo $w \in X$).

3. Seja X um espaço de dimensão finita com produto interno e $A, B\colon X \to X$ transformações lineares em X. Mostre que:

   (a) Se $B^*A = 0$, então Av é ortogonal a Bv, para todo $v \in X$.

   (b) Se $A^*A = 0$, então $A = 0$.

4. Sejam A e B transformações lineares num espaço de dimensão finita com produto interno. Mostre que se A e B comutam, então A^* e B^* comutam.

5. Seja $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de dimensão finita com produto interno e seja $(\cdot,\cdot)$ um (outro) produto interno em X. Mostre que existe uma única transformação linear $A\colon X \to X$ tal que

$$(x, y) = \langle x, Ay\rangle \quad \forall x, y \in X.$$

   Dica: Use o Teorema de Representação de Riesz.

6. Sejam X, Y espaços com produto interno de dimensão finita e $A : X \to Y$ uma transformação linear. Mostre que A é inversível se e somente se A^* é inversível.

7. Sejam X, Y espaços com produto interno de dimensão finita e $A : X \to Y$ uma transformação linear. Um vetor $\hat{x} \in X$ diz-se uma solução de *quadrados mínimos* da equação linear $Ax = b$, onde $b \in Y$, se $\hat{x}$ é minimizador global da função $f\colon X \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_Y^2,$$

   isto é, se $f(\hat{x}) \le f(x)$ para todo $x \in X$. Mostre que são equivalentes:

   (a) $\hat{x} \in X$ é solução de quadrados mínimos de $Ax = b$.

   (b) $A\hat{x} = P_{R(A)}\, b$.

(c) $A^*A\hat{x} = A^*b$.

8. Seja X um espaço *complexo* de dimensão finita com produto interno. Mostre a identidade de polarização:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right) \qquad \forall x, y \in X.$$

9. Seja X um espaço *complexo* com produto interno de dimensão finita e seja $A\colon X \to X$ uma transformação linear. Mostre que se $\langle Ax, x\rangle = 0$ para todo $x \in X$, então $A = 0$.

10. Seja X um espaço *complexo* com produto interno de dimensão finita e seja $A\colon X \to X$ uma transformação linear. Mostre que $A^* = A$ se e somente se $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in X$.