MTM3422 - Álgebra Linear II
Quinta Lista

1. Utilizando a definição, em cada caso verifique diretamente se o vetor v é *autovetor* da matriz A, isto é, verifique se $Av = \lambda v$ para algum (autovalor) λ.

   (a) $v = (-2, 1)$ e $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

   (b) $v = (1, 1, 2)$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   (c) $v = (-2, 1, 3)$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Em cada item, encontre os *autovalores* e *autovetores* da matriz A.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3/4 & 6 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

3. Fatore as matrizes abaixo como $A = X\Lambda X^{-1}$, onde X é não-singular e Λ é diagonal.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

4. Para cada uma das matrizes do Exercício 3, use a fatoração $X\Lambda X^{-1}$ para calcular A^6.

5. Encontre uma matriz 2×2 com autovalores 1 e 4 e autovetores $(3,1)$ e $(2,1)$, respectivamente. Dica: use a fatoração $X\Lambda X^{-1}$.

6. Seja A uma matriz $n \times n$ diagonalizável com autovalores iguais a 1 ou -1. Mostre que A é não-singular e que $A^{-1} = A$. Dica: use a fatoração $A = X\Lambda X^{-1}$ para concluir que $A^2 = I$.

7. Mostre que a matriz
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
não é diagonalizável.

8. Para cada uma das matrizes abaixo, encontre uma matriz B tal que $B^2 = A$.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 9 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. Encontre os autovalores e autovetores de cada uma das transformações lineares abaixo.

   (a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (2y, x)$.

   (b) $T\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2, \quad T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$.

   (c) $T\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad T(A) = A^\top$.

10. Encontre uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com autovalores -2 e 3 e autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$, respectivamente.

11. Seja E um espaço vetorial real e $T\colon E \to E$ uma transformação linear com autovetor $v \in E$ e autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostre que se $\kappa \neq 0$, então κv é autovetor de T.

12. Seja X um espaço de dimensão finita com produto interno. Um operador linear $A\colon X \to X$ diz-se *normal* se $AA^* = A^*A$. Mostre que se A é normal, então $\|Av\| = \|A^*v\|$, para todo $v \in X$, e conclua daí que todo autovetor de A é também autovetor de A^*, com o mesmo autovalor. (Dica: se A é normal, então $A - \lambda I$ também é.)

Gabarito Parcial

(1) (a) Sim

(b) Sim

(c) Não

(2) (a) $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$ com autovetores $v = x(1, 1)$ e $v = x(5, 2)$, respectivamente.

(b) $\lambda = 3$ ou $\lambda = 2$ com autovetores $v = x(1, 0)$ e $v = x(0, 1)$, respectivamente.

(c) $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ com autovetores $v = x(1, -1)$ e $v = x(1, 1)$, respectivamente.

(d) $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ com autovetores $v = y(0, 1, 0, 0)+z(0, 0, 1, 0)$ e $v = x(1, 0, 0, 0)+t(0, 0, 0, 1)$, respectivamente.

(3) Possíveis repostas:

(a) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad X^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

(b) $X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad X^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(d) Os autovalores são $\lambda = -3$, $\lambda = 0$ ou $\lambda = 5$

(5) $\begin{bmatrix} -5 & 18 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$

(8) Possíveis respostas:

(a) $B = A$

(b) $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$