MTM3422 - Álgebra Linear II
Sétima Lista

1. Dados os vetores $v_1 = (4, 4, -2)$, $v_2 = (4, -2, 4)$ e $v_3 = (1, -2, -2)$, seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que $Tv_1 = (10, -2, -2)$, $Tv_2 = (-2, 10, -2)$ e $Tv_3 = (1, 1, -5)$. Mostre que T é autoadjunto.

2. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (2x + y, x + y + z, y - 3z)$.
   (a) Mostre que T é autoadjunto mas não ortogonal.
   (b) Encontre uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

3. Sejam $A, B : X \to X$ operadores lineares *autoadjuntos* tais que
$$\langle Av, v\rangle = \langle Bv, v\rangle \qquad \forall v \in X.$$
   Mostre que $A = B$.

4. Suponha que B é invertível e que BAB^* é autoadjunto. Mostre que A é autoadjunto.

5. Seja E um espaço vetorial (não necessariamente com produto interno) e $A: E \to E$ um operador linear. Mostre que se existe um base de E formada por autovetores de A, então é possível definir um produto interno em E ao qual o operador A é autoadjunto.

6. Mostre que um operador linear $T: X \to X$ é *ortogonal* se e somente se $T^* = T^{-1}$.

7. Mostre que os únicos autovalores possíveis de um operador *ortogonal* são $+1$ e -1.

8. Prove a seguinte versão do Teorema Espectral para matrizes simétricas reais: Toda matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pode ser fatorada na forma $A = X\Lambda X^\top$, onde $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é ortogonal e $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é diagonal. Dica: use o Teorema Espectral para o operador linear $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dado por $T_A v := Av$.

9. Prove o Teorema de Cayley-Hamilton em dimensão 2: Seja E um espaço vetorial de dimensão 2, $T: E \to E$ um operador linear e α uma base de E. Mostre que
$$p_T\left([T]^\alpha_\alpha\right) = 0,$$
   onde p_T e $[T]^\alpha_\alpha$ denotam o polinômio característico de T e a matriz que representa T na base α, respectivamente.