MTM3422 Álgebra Linear II
Primeira Prova

Nome:____

Matrícula:______________________________________

1. (2.0 Pontos) Seja α a base ortonormal de $\mathbb{R}^5$ formada pelos vetores
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right), \Big(0, 0, 0, 1, 0\Big), \Big(0, 0, 0, 0, 1\Big).$$
Encontre as *coordenadas* do vetor $v = (100, \pi, \sqrt{2}, -1, 0)$ na base α.

2. (2.0 Pontos) Para números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$, use a Desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar que
$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq n\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right).$$

3. (2.0 Pontos) Seja X um espaço (real) com produto interno. Para quaisquer $u, v \in X$, mostre que os vetores $\|u\|v + \|v\|u$ e $\|u\|v - \|v\|u$ são ortogonais.

4. (2.0 Pontos) Calcule a fatoração QR da matrix
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. (2.0 Pontos) Considere o espaço de funções contínuas $C[-1, 1]$ munido com o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ e sejam F e G subespaços vetoriais de $C[-1, 1]$ formados por funções pares e ímpares, respectivamente. Recorde que $f \in C[-1, 1]$ é par (resp. ímpar) se $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) para todo $x \in [-1, 1]$. Mostre que

   (a) (1.5 Pontos) Se $f \in F$ e $g \in G$, então $\langle f, g\rangle = 0$.

   (b) (0.5 Ponto) $G = F^{\perp}$.

Prof. Maicon Marques Alves
Florianópolis, 04 de outubro de 2024.