

Primeira Lista

Prof. M. Marques Alves

UFSC

1. Em cada item, determine o produto escalar $u \cdot v$ dos vetores u e v .
 - (a) $u = (-3, 4)$ e $v = (5, -2)$
 - (b) $u = (6, -1)$ e $v = (1/2, -4)$
 - (c) $u = (2, 3)$ e $v = (0, 0)$
 - (d) $u = (1, -2, -3)$ e $v = (0, 1, 0)$
 - (e) $u = (3, 2, -1)$ e $v = (1, 0, 6)$
 - (f) $u = (1, 0, 2, 1, 8, 5/4)$ e $v = (0, 1, -1, 5, 0, 4/5)$
2. Determine um vetor $u = (x, y, z)$ satisfazendo $u \cdot v_1 = 4$, $u \cdot v_2 = 6$ e $u \cdot v_3 = 2$, onde $v_1 = (1, 2, -3)$, $v_2 = (3, -1, -1)$ e $v_3 = (2, -2, 0)$.
3. Em cada item, verifique se os vetores u e v são *ortogonais* (recorde que u e v são ditos ortogonais quando $u \cdot v = 0$). Nos quatro primeiros itens, faça um esboço geométrico no plano dos vetores u e v .
 - (a) $u = (2, 3)$ e $v = (-3, 2)$
 - (b) $u = (5, -1)$ e $v = (0, 0)$
 - (c) $u = (3, 1)$ e $v = (1, -1)$
 - (d) $u = (4, 3)$ e $v = (1, -4/3)$
 - (e) $u = (2, -1, 0)$ e $v = (0, 0, 7)$
 - (f) $u = (2, -1, 4)$ e $v = (0, -2, 1/2)$
 - (g) $u = (0, 1, 2, -5)$ e $v = (1, 0, 5, 2)$
 - (h) $u = (1, 0, 2, 1, 8, 5/4)$ e $v = (0, 1, -1, 5, 0, -12/5)$
4. Determine um vetor não-nulo de $\mathbb{R}^3$ que seja simultaneamente ortogonal aos vetores $u = (1, 1, 2)$, $v = (5, 1, 3)$ e $w = (2, -2, -3)$.
5. Em cada caso, determine um valor de m para que os vetores sejam ortogonais.
 - (a) $u = (3m, 2, -m)$ e $v = (-4, 1, 5)$
 - (b) $u = (0, m - 1, 4)$ e $v = (5, m - 1, -1)$
6. Determine a *norma* de cada um dos vetores u e v do Exercício 1. Considere a norma de um vetor $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ como $\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.
7. Determine um valor de c para que $\|v\| = 7$, onde $v = (6, -3, c)$.
8. Verifique quais dos seguintes vetores são *unitários*.
 $v_1 = (0, 1/8, 5/8, 3/8, -4/8, 3/8, -1/8, 0, 1/8, -1/8, 1/8)$,
 $v_2 = (1, 1, 1)$,
 $v_3 = (2/3, -2/3, 1/3)$.

9. Use as propriedades da norma para verificar que se u é um vetor não-nulo, então o vetor $\frac{u}{\|u\|}$ é unitário. Escreva os vetores unitários do Exercício 8 na forma $\frac{u}{\|u\|}$.
10. Verifique que cada conjunto A , B e C abaixo forma um *conjunto ortogonal* de vetores.
- $A = \{(1, 2, -3), (3, 0, 1), (1, -5, -3)\}$
 - $B = \{(\sqrt{3}, 1), (-1, \sqrt{3})\}$
 - $C = \{(-2, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 1, 1)\}$
11. Obtenha um *conjunto ortonormal* de vetores a partir de cada um dos conjuntos A , B e C do Exercício 10. Dica: use o Exercício 9.
12. Em cada um dos casos abaixo, determine se os vetores u , v e w formam um conjunto *ortogonal*, *ortonormal* ou nenhum dos dois.
- $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, -1, 1)$ e $w = (-1, 1, 2)$
 - $u = (a, b, c)$, $v = (-b, a, 0)$ e $w = (-ac, -bc, a^2 + b^2)$
 - $u = (2/7, 6/7, 3/7)$, $v = (3/7, 2/7, -6/7)$ e $w = (6/7, -3/7, 2/7)$
13. Determine a , b e c para que o conjunto $\beta = \{(1, -3, 2), (2, 2, 2), (a, b, c)\}$ seja uma *base ortogonal* de $\mathbb{R}^3$. A partir de β , construa uma base *ortonormal*.
14. Considere a base ortonormal de $\mathbb{R}^5$
- $$\alpha = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0 \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0 \right), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \right\}$$
- Faça o que se pede:
- Verifique que os vetores da base α são mutuamente ortogonais e unitários.
 - Encontre as *coordenadas* do vetor $v = (100, \pi, \sqrt{2}, -1, 0)$ na base α . Dica: use o fato que se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal, então as coordenadas de um vetor v são dadas por $v \cdot v_1, v \cdot v_2, \dots, v \cdot v_n$, ou seja, pelos Coeficientes de Fourier de v .
15. Verifique a validade da Desigualdade de Cauchy-Schwarz $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$ para os vetores u e v em cada item do Exercício 1.
16. Em cada caso, determine o *ângulo* entre os vetores u e v . Recorde que o ângulo θ entre u e v é definido por $\theta = \arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$.
- $u = (2, 1, 3)$ e $v = (6, 3, 9)$
 - $u = (2, -3)$ e $v = (3, 2)$
 - $u = (4, 1)$ e $v = (3, 2)$
 - $u = (-2, 3, 1)$ e $v = (1, 2, 4)$
 - $u = (1, 1, 1, 1)$ e $v = (1, 1, 0, 0)$
17. Para cada par de vetores u e v no Exercício 16, determine a *projeção ortogonal* de u em v . Recorde que a projeção ortogonal de u em v é definida por $\text{proj}_v u = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v$. Em cada caso, verifique também que os vetores $u - \text{proj}_v u$ e v são *ortogonais*, isto é, verifique que $(u - \text{proj}_v u) \cdot v = 0$.

18. Considere o produto interno

$$\langle u, v \rangle = x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5y_1y_2$$

definido para $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Recorde que, analogamente ao caso com produto escalar, define-se um *vetor unitário* como um vetor u tal que $\|u\| = 1$, onde $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Além disso, dois vetores u e v são ditos *ortogonais* quando $\langle u, v \rangle = 0$. Uma base diz-se uma *base ortonormal* quando seus elementos são mutuamente (dois-a-dois) ortogonais e unitários (segundo as definições acima).

Mostre que relativamente ao produto interno acima, o conjunto $\alpha = \{(1, 0), (2, -1)\}$ é *base ortonormal* de $\mathbb{R}^2$. O conjunto α é uma base ortonormal em relação ao produto escalar $u \cdot v$?

19. Determine o valor de k para que o conjunto $\beta = \{(2, -1), (k, 1)\}$ seja uma *base ortogonal* de $\mathbb{R}^2$ em relação ao produto interno

$$\langle u, v \rangle = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2,$$

onde $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Determine também uma *base ortonormal* a partir da base β .

20. Considere o produto interno

$$\langle p, q \rangle = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$$

para polinômios $p = a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $q = b_2x^2 + b_1x + b_0$ de grau menor ou igual a dois e a norma $\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$ (definida para qualquer polinômio p de grau menor ou igual a 2). Para $p_1 = x^2 - 2x + 3$, $p_2 = 3x - 4$ e $p_3 = 1 - x^2$, calcule:

- (a) $\langle p_1, p_2 \rangle$
- (b) $\|p_1\|$ e $\|p_3\|$
- (c) $\|p_1 + p_2\|$
- (d) $\frac{p_2}{\|p_2\|}$
- (e) O ângulo θ entre p_1 e p_3 . Recorde que, analogamente ao caso do produto escalar, nesse caso $\theta = \arccos \frac{\langle p_1, p_3 \rangle}{\|p_1\| \|p_3\|}$.

21. Considere o produto interno

$$\langle p, q \rangle = 2ac + ad + bc + 2bd$$

definido para polinômios $p = ax + b$ e $q = cx + d$ de grau menor ou igual a um. Defina também a norma $\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$ (para qualquer polinômio p de grau menor ou igual a um).

- (a) Calcule o ângulo θ entre os polinômios $p = x - 1$ e $q = 3x$. Recorde que, analogamente ao caso do produto escalar, nesse caso $\theta = \arccos \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \|q\|}$.
- (b) Encontre um polinômio r que seja ortogonal ao polinômio $p = x - 1$, isto é, tal que $\langle p, r \rangle = 0$.

22. Considere o produto interno

$$\langle A, B \rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2,$$

para matrizes 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

e a norma $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$ (definida para qualquer matriz A de ordem 2×2). Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

determine:

(a) $\|A\|$

(b) $\|B\|$

(c) $\|A + B\|$

(d) O ângulo θ entre A e B . Recorde que, analogamente ao caso do produto escalar, nesse caso $\theta = \arccos \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \|B\|}$.

23. Considerando o produto interno definido no Exercício 22, determine um valor de x de modo que $\langle A, B \rangle = 0$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & x \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

24. Considere o seguinte produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

definido para funções contínuas f e g no intervalo $[0, 1]$, e defina $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$, $\|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle}$. Calcule $\langle f, g \rangle$, $\|f\|$ e $\|g\|$ para $f(x) = x^2 - 2x$ e $g(x) = x + 3$.

25. Em cada item, mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é produto interno em $\mathbb{R}^2$, onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

(a) $\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ (b) $\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$

26. Mostre que

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

define um produto interno no espaço de funções contínuas $C[0, 1]$.

27. Mostre que

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\rangle = ae + 2bf + 3cg + dh$$

define produto interno no espaço $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ das matrizes reais 2×2 .

28. Seja $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz real simétrica e positiva definida, isto é, $Q^\top = Q$ e $Qx \cdot x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Mostre que $\langle x, y \rangle = Qx \cdot y$ define um produto interno em $\mathbb{R}^n$.
29. Seja X um espaço com produto interno. Mostre que
- (a) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$,
 - (b) $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$,
- para todo $u, v \in X$.
30. Seja X um espaço com produto interno. Para quaisquer $u, v \in X$, mostre que os vetores $\|u\|v + \|v\|u$ e $\|u\|v - \|v\|u$ são ortogonais.

Gabarito Parcial

- 1 (a) -23
(b) 7
(c) 0
(d) -2
(e) -3
(f) 4
- 2 $u = (3, 2, 1)$
- 3 (a) Sim
(b) Sim
(c) Não
(d) Sim
(e) Sim
(f) Não
(g) Sim
(h) Sim
- 4 Qualquer múltiplo de $(1, 7, -4)$
- 5 (a) $\frac{2}{17}$
(b) 3 ou -1
- 7 $c = 2$ ou $c = -2$
- 12 (a) Nenhum dos dois
(b) Ortogonal
(c) Ortonormal
- 13 $(a, b, c) = t(-5, 1, 4)$ para $t \neq 0$.
- 14 As coordenadas são $\frac{100+\pi}{\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}+\pi-100}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}+100-\pi}{\sqrt{3}}, -1, 0$.
- 16 (a) $\theta = 0$
(b) $\theta = \frac{\pi}{2}$
(c) $\theta = \arccos \frac{14}{\sqrt{221}}$
(d) $\theta = \arccos \frac{4\sqrt{6}}{21}$
(e) $\theta = \frac{\pi}{4}$
- 19 $k = -\frac{1}{3}$
- 20 (a) -18

(b) $\sqrt{14} \text{ e } \sqrt{2}$

(c) $\sqrt{3}$

(d) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$

(e) $\theta = \arccos \frac{\sqrt{7}}{7}$

21 (a) $\theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$

(b) $r = x + 1$

22 (c) $\sqrt{21}$

(d) $\theta = \arccos \frac{4}{\sqrt{42}}$

23 $x = 4$

24 $\langle f, g \rangle = -\frac{29}{12} \text{ e } \|f\| = \sqrt{\frac{8}{15}}$