

Segunda Lista

Prof. M. Marques Alves

UFSC

1. Seja M um conjunto não-vazio. Uma *métrica* em M é uma aplicação $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $d(x, y) \geq 0$, e $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$,
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

para todo $x, y, z \in M$. Num espaço real X com produto interno, mostre que $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(u, v) = \|u - v\|$ é uma métrica em X .

2. Seja X um espaço real com produto interno. Mostre a Identidade de Polarização

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2), \quad \forall u, v \in X.$$

3. Seja X um espaço real com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ a norma induzida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $(\cdot, \cdot)$ um produto interno em X tal que $(u, u) = \langle u, u \rangle$ para todo $u \in X$. Mostre que $(u, v) = \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in X$. Dica: use a Identidade de Polarização.

4. Seja X um espaço real com produto interno, sejam $u_1, u_2, \dots, u_n$ vetores em X e defina $\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$. Mostre que

$$\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 = \sum_{i=1}^n (\|u_i - \bar{u}\|^2 + \|\bar{u}\|^2).$$

5. Seja X um espaço real com produto interno e $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ um subconjunto ortonormal de X . Mostre que, para todo $u \in X$,

$$\|u\|^2 = \left\| u - \sum_{i=1}^k \langle u, v_i \rangle v_i \right\|^2 + \sum_{i=1}^k |\langle u, v_i \rangle|^2.$$

Conclua que vale a Desigualdade de Bessel:

$$\sum_{i=1}^k |\langle u, v_i \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \quad \forall u \in X.$$

6. Seja X um espaço real com produto interno e $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de X . Sejam $u, v \in X$ e

$$[u]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad [v]_{\beta} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

as coordenadas de u e v na base β , respectivamente. Mostre que

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

7. Em cada item, aplique o *Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt* para obter, a partir da base dada, uma *base ortonormal*.
 - (a) $\alpha = \{(3, 4), (1, 2)\}$
 - (b) $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2)\}$
 - (c) $\gamma = \{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 4)\}$
8. Determine uma *base ortonormal* para cada um dos seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.
 - (a) $U = \{(x, y, z) \mid y - 2z = 0\}$
 - (b) $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$
9. Determine uma *base ortonormal* para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $u = (1, 0, -1, 1)$, $v = (0, 1, 0, 1)$ e $w = (1, 1, -1, -2)$.
10. Considere o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ e o *Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt* em que o produto interno acima é utilizado no lugar do produto escalar. Aplique esse processo na base $\{1, x, x^2\}$ para obter a base ortonormal $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1) \right\}$. Verifique diretamente que o último conjunto é um conjunto ortonormal.

Gabarito Parcial

- 7 (a) $\{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})\}$
(b) $\{(1, 0, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$
(c) $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 1, 0)\}$

- 8 (a) $\left\{(1, 0, 0), (0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})\right\}$
(b) $\left\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})\right\}$

- 9 Uma possível resposta é

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)\right\}$$