

Quinta Lista

Prof. M. Marques Alves

UFSC

1. Utilizando a definição, em cada caso abaixo, verifique diretamente se o vetor v é *autovetor* da matriz A , isto é, verifique se $Av = \lambda v$ para algum (autovalor) λ .

(a) $v = (-2, 1)$ e $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $v = (1, 1, 2)$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $v = (-2, 1, 3)$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Em cada item, encontre os *autovalores* e *autovetores* da matriz A .

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3/4 & 6 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

3. Fatore as matrizes abaixo como $A = X\Lambda X^{-1}$, onde X é não-singular e Λ é diagonal.

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

$$(c) \ A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(d) \ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

4. Para cada uma das matrizes do Exercício 3, use a fatoração $X\Lambda X^{-1}$ para calcular A^6 .
5. Encontre uma matriz 2×2 com autovalores 1 e 4 e autovetores $(3, 1)$ e $(2, 1)$, respectivamente. Dica: use a fatoração $X\Lambda X^{-1}$.
6. Seja A uma matriz $n \times n$ diagonalizável com autovalores iguais a 1 ou -1. Mostre que A é não-singular e que $A^{-1} = A$. Dica: use a fatoração $A = X\Lambda X^{-1}$ para concluir que $A^2 = I$.
7. Mostre que a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

não é diagonalizável.

8. Para cada uma das matrizes abaixo, encontre uma matriz B tal que $B^2 = A$.

$$(a) \ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \ A = \begin{bmatrix} 9 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Encontre os autovalores e autovetores de cada uma das transformações lineares abaixo.

$$(a) \ T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (2y, x).$$

$$(b) \ T: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2, \quad T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b.$$

$$(c) \ T: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad T(A) = A^\top.$$

10. Encontre uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com autovalores -2 e 3 e autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$, respectivamente.
11. Seja E um espaço vetorial real e $T: E \rightarrow E$ uma transformação linear com autovetor $v \in E$ e autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostre que se $\theta \neq 0$, então θv é autovetor de T .
12. Seja X um espaço de dimensão finita com produto interno. Um operador linear $A: X \rightarrow X$ diz-se *normal* se $AA^* = A^*A$. Mostre que se A é normal, então $\|Av\| = \|A^*v\|$, para todo $v \in X$, e conclua daí que todo autovetor de A é também autovetor de A^* , com o mesmo autovalor. (Dica: se A é normal, então $A - \lambda I$ também é.)

Gabarito Parcial

- (1) (a) Sim
(b) Sim
(c) Não
- (2) (a) $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$ com autovetores $v = x(1, 1)$ e $v = x(5, 2)$, respectivamente.
(b) $\lambda = 3$ ou $\lambda = 2$ com autovetores $v = x(1, 0)$ e $v = x(0, 1)$, respectivamente.
(c) $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ com autovetores $v = x(1, -1)$ e $v = x(1, 1)$, respectivamente.
(d) $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ com autovetores $v = y(0, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0)$ e $v = x(1, 0, 0, 0) + t(0, 0, 0, 1)$, respectivamente.

(3) Possíveis repostas:

(a) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad X^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

(b) $X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad X^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

- (d) Os autovalores são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$ e $\lambda_3 = -3$. Os autovetores são, respectivamente, $v = y(-2, 1, 0)$, $v = x(1, 2, 0)$ e $v = x(1, 2, 8)$, com $x, y \neq 0$. As matrizes são

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{bmatrix} -2/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$

(5) $\begin{bmatrix} -5 & 18 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$

(8) Possíveis respostas:

(a) $B = A$

(b) $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$