MTM3422 Álgebra Linear II
Primeira Prova

Nome:____

Matrícula:____

1. (2.0 Pontos) Determine o valor de m para que o conjunto $\beta = \{(2,-1),(m,1)\}$ seja uma *base ortogonal* de $\mathbb{R}^2$ em relação ao produto interno
$$\langle u,v\rangle = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2, \tag{1}$$
onde $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Determine também uma *base ortonormal* (em relação ao produto interno (1)) a partir da base β.

2. (2.0 Pontos) Para números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$, use a Desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar que
$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq n\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right).$$

3. (2.0 Pontos) Seja X um espaço com produto interno. Mostre que
   (a) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$
   (b) $\big|\|u\| - \|v\|\big| \leq \|u-v\|$

   para todo $u, v \in X$.

4. (2.0 Pontos) Calcule a fatoração QR da matrix
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. (2.0 Pontos) Seja X um espaço com produto interno e S um subconjunto não-vazio de X. Mostre que
$$S^\perp = (\operatorname{span} S)^\perp,$$
onde $\operatorname{span} S$ denota o subespaço vetorial de X gerado por S.

Prof. Maicon Marques Alves
Florianópolis, 17 de setembro de 2025.