MTM510019 – Métodos Computacionais de Otimização
Primeira Prova

Nome:____

1. (2.5 Pontos) Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}\|x - c\|^2$, onde c é um vetor unitário de $\mathbb{R}^n$, e sejam $x_k = 0$ e $d_k = -\nabla f(x_k)$. Encontre os valores de $\alpha > 0$ para os quais a condição de Armijo
$$f(x_k + \alpha d_k) \leq f(x_k) + \sigma\alpha\langle \nabla f(x_k), d_k\rangle$$
seja satisfeita com $\sigma = 0.25$.

2. (2.5 Pontos) Considere a sequência (x_k) gerada pelo Método do Gradiente:
$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k), \qquad k \geq 0,$$
onde $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável e o passo $\alpha_k > 0$ é escolhido pela busca (linear) exata ou busca de Armijo. Suponha que o conjunto
$$[f \leq x_0] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x_0)\}$$
é limitado. Mostre que
$$\operatorname{dist}(x_k, S_0) \to 0, \qquad k \to +\infty,$$
onde
$$S_0 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(x) = 0\}.$$
Dica: use que, sob as hipóteses acima, todo ponto aderente de (x_k) é ponto crítico de f.

3. (1.0 Ponto) Seja $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável com derivada L-Lipschitz contínua:
$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n,$$
onde $L > 0$. Mostre que
$$\|F(y) - F(x) - F'(x_0)(y - x)\| \leq L\|y - x\| \max\{\|x - x_0\|, \|y - x_0\|\},$$
e conclua que
$$\|F(y) - F(x) - F'(x_0)(y - x)\| \leq L\|y - x\|\Big(\|y - x\| + \|y - x_0\|\Big), \tag{1}$$
para todo $x_0, x, y \in \mathbb{R}^n$. Dica: defina $\varphi(t) := F(x + t(y - x))$ e use o Teorema Fundamental do Cálculo.

4. (2.0 Pontos) Seja $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável com derivada L-Lipschitz contínua:
$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n,$$
onde $L > 0$. Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(\bar{x}) = 0$ e suponha que $F'(\bar{x})$ é inversível. Mostre que existe uma vizinhança de $\bar{x}$ tal que o método
$$x_{k+1} = x_k - F'(x_0)^{-1}F(x_k), \quad k \geq 0,$$
está bem definido e gera uma sequência (x_k) que converge linearmente para $\bar{x}$.
Dica: use a desigualdade (1) na Questão 3.

5. (2.0 Pontos) Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ um ponto crítico de f satisfazendo a condição suficiente de segunda ordem, isto é, $\nabla f(\bar{x}) = 0$ e $\nabla^2 f(\bar{x}) > 0$. Seja (x_k) uma sequência gerada pelo *Método de Região de Confiança*. Mostre que se $x_k \to \bar{x}$, então, para todo k suficientemente grande, o passo de *Newton puro*
$$x_{k+1}^N = x_k - \nabla^2 f(x_k)^{-1}\nabla f(x_k)$$
será aceito como novo iterado x_{k+1}.

Prof. Maicon Marques Alves
Florianópolis, 15 de outubro de 2025.