MTM510058 - Análise Funcional Aplicada
Terceira Lista

1. Seja X um espaço vetorial normado, (x_n) uma sequência em X e $x \in X$. Sabemos que $x_n \rightharpoonup x$ se e somente se $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in X^*$. Mostre diretamente (sem usar o sistema de vizinhanças da topologia $\sigma(X, X^*)$) que se $x_n \to x$ então $x_n \rightharpoonup x$. Mostre que se X tem dimensão finita, então vale a recíproca. (dica: use o conceito de base dual.)

2. Seja X um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Mostre que qualquer aberto não-vazio da topologia $\sigma(X, X^*)$ tem elementos de norma arbitrariamente grande. Conclua que nenhuma norma de X pode ser contínua na topologia $\sigma(X, X^*)$ e, como consequência, que não existe norma em X que gera $\sigma(X, X^*)$.

3. Seja X um espaço vetorial normado de dimensão infinita, $B_X = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ e $S_X = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$. Prove que o fecho de S_X na topologia $\sigma(X, X^*)$ é igual a B_X. Conclua que S_X não é fechado fraco de X. Prove ainda que $B_X^0 = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$ não pertence a $\sigma(X, X^*)$ e não contém pontos interiores nessa topologia.

4. Seja X um espaço vetorial normado e X^* o seu dual. Considere X e X^* como espaços localmente convexos munidos com as topologias $\sigma(X, X^*)$ e $\sigma(X^*, X)$, respectivamente. Sejam f e g funcionais lineares tomando valores em X e X^*, respectivamente. Mostre que

   (a) f é contínuo na topologia $\sigma(X, X^*)$ se e somente se $f \in X^*$.

   (b) g é contínuo na topologia $\sigma(X^*, X)$ se e somente se existe $x \in X$ tal que $g = J(x)$, onde J denota a aplicação canônica. Dica: use o Exercício 9 da Lista 1.

5. Seja X um espaço de Banach. Denote por $\tau_{\|\cdot\|}$ e $\tau_{\|\cdot\|_*}$ a topologia forte (gerada pela norma) em X e X^*, respectivamente. Mostre que

   (a) $\sigma(X, X^*) \subset \tau_{\|\cdot\|}$.

   (b) $\sigma(X, X^*) = \tau_{\|\cdot\|}$ se e somente se $\dim X < \infty$.

   (c) Se $x_n \rightharpoonup x$, então (x_n) é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

   (d) Se $x_n \rightharpoonup x$ e $f_n \to f$, então $f_n(x_n) \to f(x)$.

   (e) $\sigma(X^*, X) \subset \sigma(X^*, X^{**}) \subset \tau_{\|\cdot\|_*}$.

   (f) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, então (f_n) é limitada e $\|f\|_* \leq \liminf \|f_n\|_*$.

   (g) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ e $x_n \to x$, então $f_n(x_n) \to f(x)$.

6. Sejam X, Y espaços vetoriais normados. Mostre que

   (a) Se $T \in B(X, Y)$, então $T : (X, \sigma(X, X^*)) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ é continua.

   (b) Se X é reflexivo e $T \in B(X^*, Y)$, então $T : (X^*, \sigma(X^*, X)) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ é continua.

   (c) Se $T \in B(X, Y^*)$, então $T : (X, \sigma(X, X^*)) \to (Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ é continua.