

## MTM510058 - Análise Funcional Aplicada Quinta Lista

1. Mostre que todo subconjunto de um espaço métrico separável é também separável (como espaço métrico).
2. Seja  $X$  um e.v.n. e  $E \subset X$ . Mostre que
  - (a)  $E$  é separável se e somente se  $\text{span } E$  é separável.
  - (b)  $E$  é separável se e somente se  $\overline{E}$  é separável.
3. Mostre que todo espaço métrico totalmente limitado é separável.
4. Seja  $X$  um espaço de Banach. Mostre que  $X$  é reflexivo e separável se e somente se  $X^*$  é reflexivo e separável.
5. Seja  $X$  um espaço de Banach reflexivo. Seja  $(x_n)$  uma sequência em  $X$  tal que, para todo  $f \in X^*$ ,  $(f(x_n))$  é convergente. Mostre que  $(x_n)$  é fracamente convergente.