MTM510058 - Análise Funcional Aplicada
Sétima Lista

1. Mostre que todo espaço de Hilbert é reflexivo.

2. Seja $\{x_n\}_{n=1}^N$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert real $\mathcal{H}$. Mostre que a função
$$\mathcal{H} \ni x \mapsto \left\| x - \sum_{n=1}^{N} c_n\, x_n \right\| \in \mathbb{R}$$
atinge seu valor mínimo quando $c_n = \langle x, x_n \rangle$, para todo $1 \leq n \leq N$.

3. Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $(\cdot, \cdot)$ protudos internos em $\mathcal{H}$ e $\| \cdot \|$ norma em $\mathcal{H}$ tal que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{(x, x)}$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle = (\cdot, \cdot)$.

4. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{H}^*$ o seu dual, munido com a norma dual $\| \cdot \|_*$. Exiba um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ em $\mathcal{H}^*$ tal que $\| \cdot \|_* = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_*}$. Conclua que $\mathcal{H}^*$ é um espaço de Hilbert.

5. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, (x_n) uma sequência em $\mathcal{H}$ e $x \in \mathcal{H}$. Mostre que $x_n \to x$ se e somente se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\| \to \|x\|$.

6. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert de dimensão infinita e $\{x_n\}_{n \geq 1}$ um subconjunto ortonormal de $\mathcal{H}$. Mostre que (x_n) define uma sequência em $\mathcal{H}$ que converge fracamente para zero e que não tem subsequências fortemente convergentes.

7. Mostre que ℓ_p é Hilbert se e somente se $p = 2$.

8. Seja $E := \{(x_n) \in \ell_2 \mid x_{2k} = 0 \quad \forall k \geq 0\}$. Mostre que E é fechado e encontre $E^\perp$.

9. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $M \subset \mathcal{H}$ um subespaço vetorial. Mostre que $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

10. Em um espaço de Hilbert, mostre que se $x_n \rightharpoonup x$ e $v_n \to v$, então $\langle x_n, v_n \rangle \to \langle x, v \rangle$.

11. Seja $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert e $(\cdot, \cdot)$ um produto interno em $\mathcal{H}$ tal que
$$(x, x) \leq C \langle x, x \rangle \qquad \forall x \in \mathcal{H}, \tag{1}$$
onde $C > 0$. Mostre que existe $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que
$$(x, y) = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

12. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert real e $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Diz-se que T é *não-expansivo* se

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Diz-se ainda que T é *firmemente não-expansivo* se

$$\|T(x) - T(y)\|^2 + \|(I - T)(x) - (I - T)(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Mostre que

(a) T é firmemente não-expansivo se e somente se $\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq \|T(x) - T(y)\|^2$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

(b) T é firmemente não-expansivo se e somente se $2T - I$ e não-expansivo.

(c) T é não-expansivo se e somente se $\dfrac{T + I}{2}$ é firmemente não-expansivo.