MTM510058 - Análise Funcional Aplicada
Oitava Lista

1. Seja $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, onde X e Y são espaços de Banach. Mostre que T é injetivo e $R(T)$ é fechado se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|Tx\| \geq \alpha \|x\| \qquad \forall x \in X. \tag{1}$$

Mostre que a condição (1) implica ainda que $T^{-1} \in \mathcal{B}(R(T), X)$ e $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$.

2. Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{G})$. Mostre que $R(T)$ é fechado se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$ para todo $x \in N(T)^{\perp}$.

3. Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{G})$. Mostre que $R(T)$ é fechado se e somente se $R(T^*)$ é fechado.

4. Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{G})$. Mostre que T é inversível se e somente se T^* é inversível. Mostre ainda que se T é inversível, então $(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$.

5. Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e M subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Mostre que a projeção ortogonal sobre M é o único operador linear limitado P tal que $P^2 = P$, $P^* = P$ e $R(P) = M$.

6. Seja $E := \{f \in L^2[-1,1] \mid \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0\}$. Determine $E^{\perp}$.

7. Seja X um espaço de Banach quando munido com as normas $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$. Mostre que se existe $C > 0$ tal que $|x| \leq C\,\|x\|$ para todo $x \in X$, então $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$ são equivalentes. Dica: Use o Teorema de Aplicação Aberta.

8. Seja X um espaço de Banach quando munido com as normas $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$. Seja Y Banach e $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Suponha que existe $C > 0$ tal que $|x| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$. Mostre que para todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante $k_\varepsilon > 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \leq \varepsilon\|x\| + k_\varepsilon|x| \qquad \forall x \in X.$$

9. Sejam X e Y espaços de Banach reais e $B\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ um funcional bilinear, isto é, B é tal que $B(x,\cdot)$ e $B(\cdot,y)$ são funcionais lineares, para $x \in X$ e $y \in Y$. Mostre que se $B(x,\cdot)$ e $B(\cdot,y)$ são contínuos, para qualquer $x \in X$ e $y \in Y$, então B é contínuo. Dica: Use o Teorema de Banach-Steinhaus.

10. Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T\colon X \to Y$ um operador linear. Mostre que T é limitado se e somente se $\operatorname{int} T^{-1}(B_Y) \neq \emptyset$. ($B_Y$ denota a bola unitária de Y.)

11. Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Suponha que T é sobrejetivo e existe $r > 0$ tal que $T(B_X(0, r))$ está contido num compacto. Mostre que Y tem dimensão finita.

12. Sejam X, Y espaços de Banach. Mostre que o conjunto das aplicações lineares inversíveis de X em Y é aberto na topologia de $\mathcal{B}(X, Y)$.

13. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e A, B operadores lineares definidos em $\mathcal{H}$ tais que $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$. Mostre que $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $B = A^*$.

14. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$\langle Ax, x\rangle \geq c\|x\|^2 \qquad \forall x \in \mathcal{H},$$

onde $c > 0$. Mostre que A é isomorfismo.

15. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador linear positivo: $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Mostre que $A + \lambda I$ é isomorfismo, para todo $\lambda > 0$.