MTM510058 - Análise Funcional Aplicada
Nona Lista

1. Seja M um espaço métrico e $X \subset M$. Mostre que
   (a) Se X é totalmente limitado e $Y \subset X$, então Y é totalmente limitado.
   (b) X é totalmente limitado se e somente se $\overline{X}$ é totalmente limitado.

2. Mostre que a imagem de um operador compacto é separável.

3. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in B(\mathcal{H})$. Mostre que T é compacto se e somente se T^* é compacto.

4. Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ um operador compacto. Mostre que se T é sobrejetivo, então $\dim \mathcal{G} < \infty$.

5. Seja $M : C[0,1] \to C[0,1]$ o operador de multiplicação definido por
$$(Mf)(x) = xf(x) \qquad \forall x \in [0,1].$$
Mostre que M não é compacto. Dica: considere o subespaço $S := \{f \in C[0,1] \mid f(x) = 0 \text{ se } x \in [0,1/2]\}$ e mostre que M é inversível com inversa contínua em S.

6. Seja $K\colon L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ definido por
$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)dy,$$
onde $k(\cdot,\cdot) \in L^2([a,b] \times [a,b])$. Mostre que K é linear, limitado e compacto.