MTM510058 - Análise Funcional Aplicada
Terceira Prova

Nome:____

Assinatura:____

---

1. (2.5 Pontos) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador auto-adjunto. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

   (i) $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

   (ii) $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

2. (2.5 Pontos) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo e $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador unitário. Mostre que se $\lambda \in \sigma(U)$, então $|\lambda| = 1$.

3. (2.5 Pontos) Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Hilbert de dimensão infinita ($\mathcal{H}$ separável) e seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ um operador compacto e não-nulo. Mostre que existem conjuntos ortonormais $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ em $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$, respectivamente, e números reais $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \mu_n \geq \cdots > 0$ satisfazendo, para todo n,

$$Tx_n = \mu_n y_n,$$

$$T^* y_n = \mu_n x_n.$$

4. (2.5 Pontos) Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ um operador compacto. Mostre que se T é sobrejetivo, então $\dim \mathcal{G} < \infty$.

Prof. Maicon Marques Alves
Florianópolis, 26 de junho de 2024.