MTM3112 - Álgebra Linear
Primeira Lista

1. Considere os vetores $u = (8, 6)$, $v = (4, -1)$ e $w = (1, -2)$ de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Calcule o que se pede em cada item.

   (i) $u + v$
   (ii) $u - v$
   (iii) $-u$
   (iv) $-v$
   (v) $v - w$
   (vi) $2u$
   (vii) $\frac{1}{2}v$
   (viii) $4u - 3v$
   (ix) $2u - 3v + 4w$

   (b) Tente interpretar geometricamente cada operação realizada no item (a).

   (c) Calcule o comprimento de u, v e w.

   (d) Calcule o comprimento do vetor $u + v$.

2. Repita o Exercício 1 para os vetores $u = (-1, 0, 2)$, $v = (0, 1, -3)$ e $w = (1, 0, -5)$ de $\mathbb{R}^3$.

3. Sejam
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$
   Calcule o que se pede em cada item.

   (i) $A + B$
   (ii) $A - B$
   (iii) $-A$
   (iv) $-B$
   (v) $B - C$
   (vi) $2A$
   (vii) $\frac{1}{2}B$
   (viii) $4A - 3B$
   (ix) $2A - 3B + 4C$

4. Em qual espaço vetorial pertencem os *vetores* A, B e C do Exercício 3?

5. Considere os polinômios $p = 2x^3 - x^2 + 1$, $q = x^4 - x$ e $r = x^3 - 8$. Calcule o que se pede em cada item.

(i) $p+q$

(ii) $p-q$

(iii) $-p$

(iv) $-q$

(v) $q-r$

(vi) $2p$

(vii) $\frac{1}{2}p$

(viii) $4p-3q$

(ix) $2p-3q+4r$

6. Em qual espaço vetorial pertencem os *vetores* p, q e r do Exercício 5?

7. Considere as funções $f(x)=e^x-\operatorname{sen} x$, $g(x)=x^2+3\mathrm{sen}x$ e $h(x)=\ln x - x^2$. Calcule o que se pede em cada item.

(i) $f+g$

(ii) $f-g$

(iii) $-f$

(iv) $-g$

(v) $g-h$

(vi) $2f$

(vii) $\frac{1}{2}f$

(viii) $4g-3h$

(ix) $2f-3g+4h$

8. Em qual espaço vetorial pertencem os *vetores* f, g e h do Exercício 7?

9. Determine o vetor nulo dos espaços vetoriais abaixo.

(a) $\mathbb{R}^n$

(b) $\mathcal{P}_7$

(c) $\mathcal{M}(4,5)$

(d) $C[0,1]$

10. Determine o vetor oposto de cada vetor abaixo.

(a) $u=(1,-3,0,0,\frac{1}{2},\pi,-10)$

(b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $p(x) = -1 + x^4 - x^2 + x$

(d) $f(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen} x + \ln x$.

11. Para cada vetor u, A, p e f do Exercício 10, determine um espaço vetorial que o contenha.

12. Determine quais subconjuntos abaixo são *subespaços vetoriais* de $\mathbb{R}^2$. Justifique as suas respostas.

(a) $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x + y = 0\}$

(b) $S_2 = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x \in \mathbb{R}\}$

(c) $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x = -3y\}$

(d) $S_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ y = x + 1\}$

(e) $S_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x \geq 0\}$

(f) $S_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ y \in \mathbb{R}\}$

(g) $S_7 = \{(0, 0)\}$

13. Determine quais subconjuntos abaixo são *subespaços vetoriais* de $\mathbb{R}^3$. Justifique as suas respostas.

(a) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x = 4y \ \text{ e } \ z = 0\}$

(b) $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ z = 2x - y\}$

(c) $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ z = x^2\}$

(d) $S_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ y = x + 2 \ \text{ e } \ z = 0\}$

(e) $S_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ xy = 0\}$

14. Determine quais subconjuntos abaixo são *subespaços vetoriais* de $\mathbb{R}^n$. Justifique as suas respostas.

(a) $S_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ \mid \ x_1 + x_2 = 0\}$

(b) $S_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ \mid \ x_n = 1 + x_{n-1}\}$

(c) $S_3 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ \mid \ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$

(d) $S_4 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ \mid \ x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n\}$

15. Determine quais subconjuntos abaixo são *subespaços vetoriais* de $\mathcal{M}(2, 2)$. Justifique as suas respostas.

(a) $S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(2, 2) \ \middle| \ c = a + b \ \text{ e } \ d = 0 \right\}$

(b) $S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(2,2) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(2,2) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

(d) $S_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(2,2) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

16. Seja

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(2,2) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) W é *subespaço vetorial* de $\mathcal{M}(2,2)$?

(b) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W$?

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in W$?

Gabarito Parcial

1 (a) (i) $(12,5)$

(iv) $(-4,1)$

(v) $(3,1)$

(vii) $(2,-\frac{1}{2})$

(viii) $(20,27)$

(c) $\|u\| = 10,\ \|v\| = \sqrt{17}$

3 (i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(viii) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$

5 (i) $x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1$

(iv) $-x^4 + x$

(v) $x^4 - x^3 - x + 8$

(vii) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

(viii) $-3x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 3x + 4$

7 (i) $\mathrm{e}^x + 2\mathrm{sen}x + x^2$

(iv) $-x^2 - 3\mathrm{sen}x$

(v) $2x^2 + 3\mathrm{sen}x - \ln x$

(vii) $\frac{\mathrm{e}^x}{2} - \frac{\mathrm{sen}x}{2}$

(viii) $7x^2 + 12\mathrm{sen}x - 3\ln x$

9 (a) $(0,0,\ldots,0)$

(d) 0

10 (a) $(-1, 3, 0, 0, -\frac{1}{2}, -\pi, 10)$
(c) $1 - x^4 + x^2 - x$

12 (a) Sim
(b) Não
(e) Não
(f) Sim

13 (a) Sim
(c) Não
(d) Não
(e) Não

15 (a) Sim
(b) Sim
(c) Sim
(d) Não