MTM3112 - Álgebra Linear
Terceira Lista

1. Classifique os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ abaixo como L. I. ou L. D.

   (a) $A = \{(1,3)\}$

   (b) $B = \{(1,3),(2,6)\}$

   (c) $C = \{(2,-1),(3,5)\}$

   (d) $D = \{(1,0),(-1,1),(3,5)\}$

2. Classifique os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ abaixo como L. I. ou L. D.

   (a) $A = \{(2,-1,3)\}$

   (b) $B = \{(1,-1,1),(-1,1,1)\}$

   (c) $C = \{(2,-1,0),(-1,3,0),(3,5,0)\}$

   (d) $D = \{(2,1,3),(0,0,0),(1,5,2)\}$

3. Classifique os subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ abaixo como L. I. ou L. D.

   (a) $A = \{(2,1,0,0),(1,0,2,1),(-1,2,0,-1)\}$

   (b) $B = \{(0,1,0,-1),(1,1,1,1),(-1,2,0,1),(1,2,1,0)\}$

   (c) $C = \{(1,-1,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,-1),(1,2,1,-2)\}$

   (d) $D = \{(1,1,2,4),(1,-1,-4,2),(0,-1,-3,1),(2,1,1,5)\}$

4. Verifique se o conjunto de matrizes abaixo é L. I. ou L. D.

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

5. Determine um valor de k de modo que o conjunto

$$\{(-1,0,2),(1,1,1),(k,-2,0)\}$$

   seja L. I.

6. Suponha que os vetores u, v e w sejam L. I. Verifique então que os vetores $u+v$, $u+w$ e $v+w$ são também L. I.

7. Verifique quais subconjuntos abaixo formam uma base para $\mathbb{R}^2$.

   (a) $A = \{(1,2),(-1,3)\}$

   (b) $B = \{(0,0),(2,3)\}$

8. Verifique quais subconjuntos abaixo formam uma base para $\mathbb{R}^3$.

   (a) $A = \{(1,1,-1),(2,-1,0),(3,2,0)\}$

   (b) $B = \{(1,0,1),(0,-1,2),(-2,1,-4)\}$

9. Verifique que o conjunto

$$\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,3),(0,0,0,5)\}$$

   é base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$.

10. Determine uma base e dê a dimensão para cada um dos seguintes subespaços vetoriais.

   (a) $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 3x\}$

   (b) $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$

   (c) $S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$

11. Mostre que o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

   é base do espaço vetorial $M(2,2)$.

12. Escreva uma base para o espaço vetorial das matrizes $n \times n$, isto é, para $M(n,n)$. Qual é a dimensão desse espaço?

13. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelo vetores $v_1 = (1,-1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1,1)$, $v_3 = (-2,2,1,1)$ e $v_4 = (1,0,0,0)$, isto é, $[v_1, v_2, v_3, v_4]$.

   (a) O vetor $(2,-3,2,2)$ pertence a $[v_1, v_2, v_3, v_4]$? Justifique sua resposta.

   (b) Encontre uma base para $[v_1, v_2, v_3, v_4]$. Qual é a dimensão desse subespaço?

14. Qual seria uma base natural para o espaço vetorial $\mathcal{P}_n$? Qual é a dimensão desse espaço?

15. Seja S o subespaço vetorial de $M(2,2)$ gerado pelas matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

   Encontre uma base e dê a dimensão de S.

16. Considere os subespaços vetoriais S_1 e S_2 de $M(2,2)$ definidos por

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a = d, \quad b = c \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a = c, \quad b = d \right\}$$

Determine $S_1 \cap S_2$ e dê uma base para esse subespaço vetorial.

17. Considere os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$S_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\mid\; x + y = 0 \;\text{ e }\; z - t = 0\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\mid\; x - y - z + t = 0\}$$

Determine $S_1 \cap S_2$ e dê uma base para esse subespaço vetorial.

Gabarito Parcial

1 (a) L. I.
  (b) L. D.
  (c) L. I.
  (d) L. D.

2 (a) L. I.
  (b) L. I.
  (c) L. D.
  (d) L. D.

3 (a) L. I.
  (b) L. D.
  (c) L. D.
  (d) L. I.

4 L. I.

5 Qualquer valor diferente de -3.

7 A

8 A

12 A dimensão de $M(2,2)$ é n^2

13 (a) Sim
  (b) Uma base de $[v_1, v_2, v_3, v_4]$ pode ser formada pelos vetores $w_1 = (1,0,0,0)$, $w_2 = (0,1,0,0)$, $w_3 = (0,0,1,1)$.

14 $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

16 $S_1 \cap S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a = b = c = d \right\}$

17 $S_1 \cap S_2 = [(0,0,1,1)]$