

MTM3112 - Álgebra Linear

Quarta Lista

1. Sejam $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\beta_1 = \{(-1, 1), (1, 1)\}$, $\beta_2 = \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\}$ e $\beta_3 = \{(2, 0), (0, 2)\}$ bases ordenadas de \mathbb{R}^2 .

(a) Ache as matrizes mudança de base:

(i) $[I]_{\beta}^{\beta_1}$

(ii) $[I]_{\beta_1}^{\beta}$

(iii) $[I]_{\beta_2}^{\beta}$

(iv) $[I]_{\beta_3}^{\beta}$

(b) Ache as coordenadas do vetor $v = (3, -2)$ em relação às bases:

(i) β

(ii) β_1

(iii) β_2

(iv) β_3

(c) Suponha que as coordenadas de um vetor v em relação à base β_1 são dadas por

$$[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Encontre as coordenadas do vetor v em relação às bases:

(i) β

(ii) β_2

(iii) β_3

2. Suponha que α e α' são bases ordenadas de \mathbb{R}^3 e que

$$[I]_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ache

(a) $[v]_{\alpha}$ onde $[v]_{\alpha'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $[v]_{\alpha'}$ onde $[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. No espaço das matrizes triangulares superiores, considere as bases β e β' dadas por

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
$$\beta' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ache a matrix mudança de base $[I]_{\beta}^{\beta'}$.

4. Se α é base de um espaço vetorial, qual é a matriz de mudança de base $[I]_{\alpha}^{\alpha}$?
5. Seja $T : V \rightarrow W$ uma função. Mostre que
- (a) Se T é uma transformação linear, então $T(0) = 0$.
 - (b) Se $T(0) \neq 0$, então T não é uma transformação linear.
6. Determine quais das aplicações abaixo são transformações lineares. Justifique a sua resposta.
- (a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T_1(x, y) = (x + y, x - y)$.
 - (b) $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $T_2(x, y) = xy$.
 - (c) $T_3 : M(2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $T_3 \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
 - (d) $T_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T_4(x) = |x|$.
7. (a) Ache uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$.
- (b) Encontre $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3, 2)$.
8. Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$? Ache $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$.
9. Qual é a transformação linear $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $S(3, 2, 1) = (1, 1)$ e $S(0, 1, 0) = (0, -2)$ e $S(0, 0, 1) = (0, 0)$?
10. Determine a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ tal que $T(1) = x$, $T(x) = 1 - x^2$ e $T(x^2) = x + 2x^2$.

Gabarito Parcial

1 (a) (i) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
(ii) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
(iii) $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$
(iv) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- 6 (a) Sim
(b) Não
(c) Não
(d) Não

7 (a) $T(x, y, z) = (2x + y, y - z)$

10 $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + (a_0 + a_2)x + (2a_2 - a_1)x^2$