

MTM3112 - Álgebra Linear

Sexta Lista

1. Sejam $\alpha = \{(1, -1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$ bases de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , respectivamente e suponha que

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Ache $T(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Se $S(x, y) = (2y, x - y, x)$, ache $[S]_{\beta}^{\alpha}$.

(c) Ache uma base γ de \mathbb{R}^3 tal que $[T]_{\gamma}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Seja

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canônica do espaço $M(2, 2)$ das matrizes 2×2 . Seja $T : M(2, 2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + d, b + c)$.

(a) Ache $[T]_{\alpha}^{\beta}$, onde α é a base canônica de \mathbb{R}^2 .

(b) Suponha que $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow M(2, 2)$ é tal que $[S]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ache $S(x, y)$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e se possível $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo $S(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ache vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$ tais que

(a) $T(u) = u$.

(b) $T(v) = -v$.

4. Suponha que

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

onde $\alpha = \{(-1, 1), (1, 0)\}$ e $\beta = \{(1, 1, -1), (2, 1, 0), (3, 0, 1)\}$ são bases de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , respectivamente.

Encontre a expressão de $T(x, y)$ e $[T]$.

5. Suponha que

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

é a matriz que representa a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nas bases canônicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Encontre $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (2, 4, -2)$.

6. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear com matriz

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

onde β denota a base canônica de \mathbb{R}^2 e $\beta' = \{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$. Encontre a imagem do vetor $v = (2, -3)$ por T .

7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear com matriz

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $\beta = \{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ e $\beta' = \{(-1, 0), (0, -1)\}$.

- (a) Determine uma base para $Im(T)$.
- (b) Determine uma base para $N(T)$.
- (c) T é injetora? Sobrejetora?

8. Mostre que a matriz que representa a transformação identidade $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $I(v) = v$ em qualquer base de \mathbb{R}^n é a matriz identidade de ordem $n \times n$.

9. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow M(2, 2)$ uma transformação linear tal que

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

onde α e β denotam as bases canônicas de \mathbb{R}^2 e $M(2, 2)$, respectivamente.

- (a) Determine $T(1, 0)$, $T(0, 1)$ e $T(2, 3)$.
- (b) Determine $T(x, y)$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (c) Encontre (a, b) tal que

$$T(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

10. Sejam T e S definidas por $T(x, y) = (x - 2y, y)$ e $S(x, y) = (2x, -y)$. Determine $S + T$, $T - S$, $2S + 4T$, $S \circ T$, $T \circ S$ e $S \circ S$.
11. Sejam $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por $S(x, y, z) = (x + y, z, x - y, y + z)$ e $T(x, y) = (2x + y, x - y, x - 3y)$. Verifique diretamente que a identidade

$$[S \circ T] = [S][T]$$

é verdadeira.

12. Sejam T e S definidas em \mathbb{R}^3 por $T(x, y, z) = (x - z, y, z)$ e $S(x, y, z) = (x, 2y, x - y)$. Determine $[S \circ T]$ e $[T \circ S]$.
13. Suponha que os pontos do plano $(2, -1)$ e $(-1, 4)$ são vértices de um quadrado. Use a matriz de rotação para determinar os outros vértices.
14. Suponha que os pontos do plano $(-1, -1)$, $(4, 1)$ e (a, b) sejam vértices de um triângulo retângulo isósceles reto em $(-1, -1)$. Use a matriz de rotação para determinar o ponto (a, b) .
15. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reflexão através da reta $y = 3x$. Encontre $T(x, y)$ e uma base α de \mathbb{R}^2 tal que $[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Gabarito Parcial

1 (a) $T(x, y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}, 2x+y\right)$

(b) $[S]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{3} & \frac{20}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$

(c) $\gamma = \{(1, 1, 1), (3, -3, 0), (-1, -1, 2)\}$

2 (a) $[T]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $S(x, y) = \begin{bmatrix} 2x+y & x-y \\ -x & y \end{bmatrix}$

3 (a) $u = (x, -x)$.

(b) $v = (x, 0)$.

5 $v = (2, 0)$.

6 $(11, -13, 2)$

7 (a) Conclua primeiro que $Im(T) = \mathbb{R}^2$.

(b) Mostre primeiro que $N(T) = \{(x, x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(c) T não é injetora e é sobretora.

9 (b) $T(x, y) = \begin{bmatrix} x & 2x+y \\ 3x-2y & -x+2y \end{bmatrix}$

(c) Não existe (a, b) .