MTM3112 - Álgebra Linear
Nona Lista

1. Utilizando a definição, em cada caso verifique diretamente que o vetor v é *autovetor* da matriz A, isto é, verifique que $Av = \lambda v$ para algum (autovalor) λ.

   (a) $v = (-2, 1)$ e $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

   (b) $v = (1, 1, 2)$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   (c) $v = (-2, 1, 3)$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Em cada item, encontre os *autovalores* e *autovetores* da matriz A.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3/4 & 6 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

3. Fatore as matrizes abaixo como $A = X\Lambda X^{-1}$, onde X é não-singular e Λ é diagonal.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

4. Para cada uma das matrizes do Exercício 3, use a fatoração $X\Lambda X^{-1}$ para calcular A^6.

5. Encontre uma matriz 2×2 com autovalores 1 e 4 e autovetores $(3,1)$ e $(2,1)$, respectivamente. Dica: use a fatoração $X\Lambda X^{-1}$.

6. Seja A uma matriz $n \times n$ diagonalizável com autovalores iguais a 1 ou -1. Mostre que A é não-singular e que $A^{-1} = A$. Dica: use a fatoração $A = X\Lambda X^{-1}$ para concluir que $A^2 = I$.

7. Mostre que qualquer matriz 3×3 da forma

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

não é diagonalizável.

8. Para cada uma das matrizes abaixo, encontre uma matriz B tal que $B^2 = A$.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 9 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. Fatore cada uma das matrizes abaixo no formato $A = X\Lambda X^T$, onde X é uma *matriz ortogonal* e Λ é uma *matrix diagonal.*

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Gabarito Parcial

(2) (a) $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$ com autovetores $v = x(1,1)$ e $v = x(5,2)$, respectivamente.

(b) $\lambda = 3$ ou $\lambda = 2$ com autovetores $v = x(1,0)$ e $v = x(0,1)$, respectivamente.

(c) $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ com autovetores $v = x(1,-1)$ e $v = x(1,1)$, respectivamente.

(d) $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ com autovetores $v = y(0,1,0,0)+z(0,0,1,0)$ e $v = x(1,0,0,0)+t(0,0,0,1)$, respectivamente.

(3) Algumas possíveis repostas são

(a) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad X^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

(b) $X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad X^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(d) Os autovalores são $\lambda = -3$, $\lambda = 0$ ou $\lambda = 5$

(5) $\begin{bmatrix} -5 & 18 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$

(8) Algumas possíveis respostas:

(a) $B = A$

(b) $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$