Análise Funcional Aplicada - 2022.01

Prof. Maicon Marques Alves

Lista 01

1. Seja X um espaço vetorial. Um subconjunto Y de X é *afim* se existe um subespaço vetorial Y_0 de X e $a_0 \in X$ tal que $Y = Y_0 + a_0$. Mostre que Y é afim se e somente se $\lambda x + (1-\lambda)y \in Y$, para todo $x, y \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Considere $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$ e

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx \qquad (f \in C[0,1]).$$

   Mostre que $C[0,1]$, munido com $\|\cdot\|_1$, é um espaço vetorial normado que não é Banach.

3. Considere $C[0,1]$ e $\|\cdot\|_1$ como no exercício anterior e $t_0 \in [0,1]$. Defina

$$\delta_{t_0} : C[0,1] \to \mathbb{R}, \qquad \delta_{t_0}(f) = f(t_0).$$

   Mostre que δ_{t_0} é um funcional linear em $C[0,1]$ que não é limitado.

4. Uma *Base de Hamel* de um espaço vetorial X é um subconjunto $\mathcal{B}$ de X linearmente independente tal que o espaço gerado por $\mathcal{B}$ é X. Mostre que todo espaço vetorial $X \neq \{0\}$ admite uma base de Hamel. Dica: Use o Lemma de Zorn.

5. Seja X um e.v.n. e sejam $f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n$ funcionais lineares em X. Mostre que são equivalentes:

   (a) Existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$f_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, f_j$$

   (b) Existe $c > 0$ tal que

$$|f_0(x)| \le c \max_{1 \le j \le n} |f_j(x)|, \quad \forall x \in X$$

   (c) $\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{N}(f_j) \subset \mathrm{N}(f_0)$,

   onde $\mathrm{N}(f_i)$ denote o núcleo de f_i $(0 \le i \le n)$.

6. Seja X um e.v.n. munido com uma norma $\|\cdot\|$. Mostre que a topologia de X gerada por $\|\cdot\|$ é a menor topologia que faz $\|\cdot\|$ contínua em X.

7. Seja X um e.v.n. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ de X diz-se *absolutamente convergente* quando $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Mostre que X é Banach se e somente se toda série absolutamente convergente em X é convertente.

8. Seja X e.v.n e $M \subset X$ um subespaço fechado. Defina $X/M = \{[x] \mid x \in X\}$, onde

$$[x] := \{y \in X \mid y - x \in M\}.$$

Mostre que X/M é um espaço vetorial quando munido com as operações $[x] + [z] = [x + z]$ e $\lambda[x] = [\lambda x]$. Mostre ainda que X/M é Banach se munido com a norma $|||[x]||| = \inf_{y \in [x]} \|y\|$.

9. Mostre que quaisquer duas normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.
Dica: Mostre que qualquer norma em $\mathbb{R}^n$ é equivalente a norma $\| \cdot \|_\infty$.