Análise Funcional Aplicada - 2022.01

Prof. Maicon Marques Alves

Lista 10

1. Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Hilbert reais, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ e $y \in \mathcal{G}$. Assuma que $R(T)$ é fechado e seja $f(x) := \frac{1}{2}\|Tx - y\|^2$, $x \in \mathcal{H}$. Mostre que são equivalentes:

   (a) $x \in \mathcal{H}$ é minimizador de f.

   (b) $Tx = P_{R(T)}y$.

   (c) $T^*Tx = Ty$.

   Conclua que f admite minimizadores em $\mathcal{H}$.

2. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert real e $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ uma função Fréchet diferenciável. Mostre que, para cada $x \in \mathcal{H}$, existe um único elemento $\nabla f(x) \in \mathcal{H}$, chamado de gradiente de f em x, tal que
$$f'(x)h = \langle \nabla f(x), h \rangle \qquad \forall h \in \mathcal{H}.$$

3. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert real e $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ uma função Fréchet diferenciável. Mostre que:

   (a) f é convexa se e somente se $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

   (b) Se f é convexa, então x é minimizador de f se e somente se $\nabla f(x) = 0$.

4. Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Hilbert reais, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$, $y \in \mathcal{G}$ e seja $f(x) := \frac{1}{2}\|Tx - y\|^2$, $x \in \mathcal{H}$. Mostre que

   (a) f é diferenciável e $\nabla f(x) = T^*(Tx - y)$.

   (b) $x \in \mathcal{H}$ é minimizador de f se e somente se $T^*Tx = Ty$.

5. Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Hilbert reais, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$, $y \in \mathcal{G}$, $z \in \mathcal{H}$ e $\alpha > 0$. Seja $f(x) := \frac{1}{2}\|Tx - y\|^2$, $x \in \mathcal{H}$. Mostre que $\bar{x} := (T^*T + \alpha I)^{-1}(T^*y + \alpha z)$ é a única solução do problema variacional
$$\min_{x \in \mathcal{H}} \left(\frac{1}{2}\|Tx - y\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|x - z\|^2 \right).$$

6. Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Mostre que $R(T)$ é fechado se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$ para todo $x \in N(T)^{\perp}$.

7. Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Mostre que $R(T)$ é fechado se e somente se $R(T^*)$ é fechado.

8. Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Mostre que T é inversível se e somente se T^* é inversível.

9. Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e M subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Mostre que a projeção ortogonal sobre M é o único operador linear limitado P tal que $P^2 = P$, $P^* = P$ e $R(P) = M$.

10. Seja $E := \{f \in L^2(-1, 1) \mid \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0\}$. Determine $E^{\perp}$.