Análise Funcional Aplicada - 2022.01

Prof. Maicon Marques Alves

Lista 11

1. Mostre que a imagem de um operador compacto é separável.

2. Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ um operador compacto. Mostre que se T é sobrejetivo, então $\dim \mathcal{G} < \infty$.

3. Seja X um espaço de Banach. Recorde que um operador $T \in \mathcal{B}(X)$ é *compacto* se $\overline{T(A)}$ é compacto sempre que $A \subset X$ for limitado. Mostre que o operador de multiplicação

$$M_x : C[0,1] \to C[0,1], \quad (M_x f)(x) = xf(x), \qquad x \in [0,1],$$

não é compacto em $C[0,1]$.
Dica: considere o subespaço $S := \{f \in C[0,1] \mid f(x) = 0 \text{ se } x \in [0,1/2]\}$ e mostre que M_x é inversível com inversa contínua em S.

4. Seja $T : \ell_2 \to \ell_2$ definido por

$$T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

Faça o que se pede:

(a) Calcule T^*.
(b) Mostre que $\|T\| = 1$.
(c) Mostre que $\sigma_p(T) = \emptyset$.
(d) Mostre que $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$.
(e) Mostre que $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.