Análise Funcional Aplicada - 2022.01

Prof. Maicon Marques Alves

Lista 4

1. Seja X um e.v.n. e $Y \subset X$ um subespaço vetorial. Mostre que são equivalentes:
   (a) Y é denso em X.
   (b) Se $f \in X^*$ e $f|_Y = 0$, então $f = 0$.

2. Seja X um espaço de Banach. Mostre que X é reflexivo se e somente se X^* é reflexivo.

3. Seja $X = \ell_\infty$ (munido com a norma infinito). Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $\pi_n : X \to \mathbb{R}$ definida por $\pi_n(x) = x_n$, onde $x = (x_n)$. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n \in B_{X^*}$, mas que a sequência (π_n) não tem subsequência convergente na topologia fraca* de X^*. Isso representa alguma contradição ao Teorema de Banach-Alaoglu?

4. Mostre que um espaço de Banach X é reflexivo se e somente se $\sigma(X^*, X^{**}) = \sigma(X^*, X)$.

5. Seja X um espaço de Banach e $M \subset X$ um subespaço vetorial. Mostre que
   (a) $\sigma(M, M^*) = \{\mathcal{O} \cap M \mid \mathcal{O} \in \sigma(X, X^*)\}$.
   (b) se X é reflexivo e M é fechado, então M é reflexivo.

6. Sejam X, Y espaços vetoriais normados. Mostre que
   (a) Se $T \in B(X, Y)$, então $T : (X, \sigma(X, X^*)) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ é continua.
   (b) Se X é reflexivo e $T \in B(X^*, Y)$, então $T : (X^*, \sigma(X^*, X)) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ é continua.
   (c) Se $T \in B(X, Y^*)$, então $T : (X, \sigma(X, X^*)) \to (Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ é continua.

7. Seja X um espaço de Banach. Denote por $\tau_{\|\cdot\|}$ e $\tau_{\|\cdot\|_*}$ a topologia forte (gerada pela norma) em X e X^*, respectivamente. Mostre que
   (a) $\sigma(X, X^*) \subset \tau_{\|\cdot\|}$.
   (b) $\sigma(X, X^*) = \tau_{\|\cdot\|}$ se e somente se $\dim X < \infty$.

(c) Se $x_n \rightharpoonup x$, então (x_n) é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

(d) Se $x_n \rightharpoonup x$ e $f_n \to f$, então $f_n(x_n) \to f(x)$.

(e) $\sigma(X^*, X) \subset \sigma(X^*, X^{**}) \subset \tau_{\|\cdot\|_*}$.

(f) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, então (f_n) é limitada e $\|f\|_* \leq \liminf \|f_n\|_*$.

(g) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ e $x_n \to x$, então $f_n(x_n) \to f(x)$.