Análise Funcional Aplicada - 2022.01

Prof. Maicon Marques Alves

Lista 7

1. Seja X um espaço de Banach (real) reflexivo, $f : X \to (-\infty, \infty]$ uma função convexa e semi-contínua inferiormente e $z \in X$. Mostre a existência de solução para o problema variacional

$$\min_{x \in X} \left\{ f(x) + \frac{1}{2}\|x - z\|^2 \right\}.$$

   Dica: use o Exerício 1 da Lista 5.

2. Dê um exemplo de espaço reflexivo porém não uniformemente convexo.

3. Mostre as seguintes generalizações da Desigualdade de Holder ($1 \leq p, q, s \leq \infty$):

$$\|uv\|_s \leq \|u\|_p \|v\|_q, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}.$$
$$\|uvw\|_s \leq \|u\|_p \|v\|_q \|w\|_r, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{s}.$$

4. Construa um isomorfismo isométrico $T : \ell_\infty \to \ell_1^*$. É possível construir um isomorfismo isométrico de ℓ_1 em ℓ_∞^*?

5. Mostre que ℓ_1 e ℓ_∞ não são reflexivos.

6. Sejam c_0 e c os espaços das sequências que convergem para zero e convergentes, respectivamente (ambos munidos com a norma infinito). Mostre que
   (a) Para todo $1 \leq p < \infty$,
   $$\ell_p \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty.$$
   (b) c_0 e c são subespaços fechados de ℓ_∞.
   (c) Existe um isomorfismo isométrico de ℓ_1 em c_0^*.
   (d) c_0 e c não são reflexivos.

(e) c_0 e c são separáveis.

7. Considere o espaço ℓ_p, para $1 \leq p \leq \infty$. Para cada $n \geq 1$, seja e_n o elemento de ℓ_p cuja n-ésima coordenada é igual a um e as demais são iguais a zero. Mostre que

   (a) Se $p < \infty$, então (e_n) é uma sequência fracamente mas não fortemente convergente em ℓ_p.

   (b) $\{e_n\}$ é um subconjunto fechado mas não compacto de ℓ_p.

8. Seja $S = \{(x_n)_{n\geq 1} \mid n^p\, x_n \to 0,\ n \to \infty,\ \forall p \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $S \subset \ell^p,\ \forall p \in \mathbb{N}$.