Análise Funcional Aplicada - 2022.01

Prof. Maicon Marques Alves

Lista 9

1. Seja $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ o espaço de Schwartz e $\mathcal{F}$ a transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Use o Teorema da Inversão de Fourier para mostrar que $\mathcal{F}^4 u = u$ para todo $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{H}^*$ o seu dual, munido com a norma dual $\|\cdot\|_*$. Exiba um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ em $\mathcal{H}^*$ tal que $\|\cdot\|_* = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_*}$. Conclua que $\mathcal{H}^*$ é um espaço de Hilbert.

3. Mostre que todo espaço de Hilbert é reflexivo.

4. Mostre que todo espaço com produto interno é uniformemente convexo.

5. Seja X um espaço com produto interno, (x_n) uma sequência em X e $x \in X$. Mostre que $x_n \to x$ se e somente se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\| \to \|x\|$.

6. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert de dimensão infinita e $\{x_n\}_{n \geq 1}$ um subconjunto ortonormal de $\mathcal{H}$. Mostre que (x_n) define uma sequência em $\mathcal{H}$ que converge fracamente para zero e que não tem subsequências fortemente convergentes.

7. Mostre que ℓ_p é Hilbert se e somente se $p = 2$.

8. Seja $E := \{(x_n) \in \ell_2 \mid x_{2k} = 0 \quad \forall k \geq 0\}$. Mostre que E é fechado e encontre $E^\perp$.

9. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $M \subset \mathcal{H}$ um subespaço vetorial. Mostre que $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

10. Em um espaço com produto interno, mostre que se $x_n \rightharpoonup x$ e $v_n \to v$, então $\langle x_n, v_n \rangle \to \langle x, v \rangle$.