Análise Funcional Aplicada - 2022.01
Terceira Prova

Nome:____

Assinatura:____

---

1) (2.0 Pontos) Sejam $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ espaços de Hilbert ($\mathcal{H}$ separável) e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ um operador compacto, $T \neq 0$. Mostre que:

(a) (1.0 Ponto) Existe uma base ortonormal de $\mathcal{H}$ formada por autovetores de T^*T.

(b) (1.0 Ponto) Os autovalores não-nulos de T^*T (repetidos de acordo com a sua multiplicidade) podem ser organizados da seguinte forma

$$\|T\|^2 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq \cdots > 0.$$

2) (2.0 Pontos) Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Mostre que T é inversível se e somente se T^* é inversível.

3) (2.0 Pontos) Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ um operador compacto. Mostre que se T é sobrejetivo, então $\dim \mathcal{G} < \infty$.

4) (2.0 Pontos) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert de dimensão infinita e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador compacto. Mostre que T não satisfaz nenhuma equação da forma

$$\sum_{k=0}^{N} a_k T^k = 0,$$

com $a_0 \neq 0$, onde $N > 1$ e $T^0 = I$.

5) (2.0 Pontos) Seja $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ dado por

$$(Tf)(x) = xf(x), \qquad x \in (0,1).$$

Mostre que T é linear, limitado, auto-adjunto e não possui autovalores.

Prof. Maicon Marques Alves
Florianópolis, 28 de junho de 2022.