Análise Funcional Aplicada - 2022.01
Prova de Recuperação

Nome:____

Assinatura:______________________________________

---

1) (2.5 Pontos) Seja X um espaço localmente convexo munido com uma família de seminormas $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in L}$ e

$$V = V(x_0, \rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}, \ldots, \rho_{\alpha_k}, \varepsilon) = \{x \in X \mid \rho_{\alpha_i}(x - x_0) < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, k\}$$

uma vizinhança de $x_0 \in X$. Dado $y \in V$, construa (explicitamente) uma vizinhaça

$$W = W(y, \rho_{\beta_1}, \rho_{\beta_2}, \ldots, \rho_{\beta_\ell}, \delta) = \{x \in X \mid \rho_{\beta_i}(x - y) < \delta, \quad i = 1, \ldots, \ell\}$$

de y tal que

$$W \subset V.$$

2) (2.5 Pontos) Seja X um espaço de Banach. Para $M \subset X$ e $N \subset X^*$ subespaços vetoriais defina

$$M^0 = \{f \in X^* \mid f(x) = 0 \ \forall x \in M\}, \qquad N^+ = \{x \in X \mid f(x) = 0 \ \forall f \in N\}.$$

Mostre que

$$\left(M^0\right)^+ = \overline{M},$$

onde o fecho é tomado na topologia forte de X.

3) (2.0 Pontos) Mostre que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ com imersão contínua.

4) (3.0 Pontos) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $A \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ tal que $\langle x - y, u - v\rangle \geq 0$ para todo $(x, u), (y, v) \in A$. Seja $\big((x_n, u_n)\big)_{n\geq 1}$ uma sequência em A tal que $x_n \rightharpoonup x$ e $u_n \rightharpoonup u$. Mostre que existe uma subsequência $\big((x_{n_k}, u_{n_k})\big)_{k\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \langle x_{n_k}, u_{n_k}\rangle$ existe e $\lim_{k\to\infty} \langle x_{n_k}, u_{n_k}\rangle \geq \langle x, u\rangle$.

Prof. Maicon Marques Alves
Florianópolis, primeiro de julho de 2022.