Análise Funcional Aplicada

Prof. Maicon Marques Alves

Primeira Lista

1. Seja X um e.v.n. e Y um subespaço de X cujo interior é não-vazio. Mostre que $Y = X$.

2. Seja X um espaço vetorial. Um subconjunto Y de X é *afim* se existe um subespaço vetorial Y_0 de X e $a_0 \in X$ tal que $Y = Y_0 + a_0$. Mostre que Y é afim se e somente se $\lambda x + (1-\lambda)y \in Y$, para todo $x, y \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Seja X um e.v.n., $A, B \subset X$ e $A - B := \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$. Mostre que:
   (a) Se A é aberto, então $A - B$ é aberto.
   (b) Se A é fechado e B é compacto, então $A - B$ é fechado.

4. Seja X um espaço de Banach e M, N subespaços de X tais que $M \cap N = \{0\}$. Mostre que se M é fechado e N tem dimensão finita, então $M + N$ é fechado.

5. Considere $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ é contínua$\}$ e
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx \qquad (f \in C[0,1]).$$
Mostre que $C[0,1]$, munido com $\|\cdot\|_1$, é um espaço vetorial normado que não é Banach.

6. Considere $C[0,1]$ e $\|\cdot\|_1$ como no exercício anterior e $t_0 \in [0,1]$. Defina
$$\delta_{t_0} : C[0,1] \to \mathbb{R}, \qquad \delta_{t_0}(f) = f(t_0).$$
Mostre que δ_{t_0} é um funcional linear em $C[0,1]$ que não é limitado.

7. Uma *Base de Hamel* de um espaço vetorial X é um subconjunto $\mathcal{B}$ de X linearmente independente tal que o espaço gerado por $\mathcal{B}$ é X. Mostre que todo espaço vetorial $X \neq \{0\}$ admite uma base de Hamel. Dica: Use o Lemma de Zorn.

8. Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial e $f : Y \to \mathbb{R}$ linear. Seja $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear tal que
$$f(y) \leq p(y) \quad \forall y \in Y.$$

Sem usar o Lemma de Zorn, mostre que existe um funcional linear $\tilde{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{f}(y) = f(y),\ \forall y \in Y \ \text{ e } \ \tilde{f}(x) \le p(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

9. Seja X um e.v.n. e sejam $f_0, f_1, f_2, \cdots, f_n$ funcionais lineares em X. Mostre que são equivalentes:

   (a) Existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que

   $$f_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, f_j$$

   (b) Existe $c > 0$ tal que

   $$|f_0(x)| \le c \max_{1 \le j \le n} |f_j(x)|, \quad \forall x \in X$$

   (c) $\bigcap_{j=1}^{n} \mathtt{N}(f_j) \subset \mathtt{N}(f_0)$,

   onde $\mathtt{N}(f_i)$ denote o núcleo de f_i $(0 \le i \le n)$.

10. Seja X um e.v.n. munido com uma norma $\|\cdot\|$. Mostre que a topologia de X gerada por $\|\cdot\|$ é a menor topologia linear que faz $\|\cdot\|$ contínua em X.

11. Seja X um e.v.n. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ de X diz-se *absolutamente convergente* quando $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Mostre que X é Banach se e somente se toda série absolutamente convergente em X é convertente.

12. Sejam X, Y e.v.n. Mostre que $\mathcal{B}(X,Y)$ é um espaço de Banach se e somente se Y é um espaço de Banach. Conclua, em particular, que X^* é Banach.