Análise Funcional Aplicada

Prof. Maicon Marques Alves

Segunda Lista

1. Seja X um e.v.n. e C um subconjunto convexo de X tal que $0 \in \text{int}\, C$. Mostre que se C é aberto, então
$$C = \{x \in X \mid \rho_C(x) < 1\},$$
onde ρ_C denota o Funcional de Minkowski de C.

2. Seja X um e.v.n. real e $f : X \to \mathbb{R}$ linear, $f \neq 0$. Mostre que se $A \subset X$ é aberto, então $f(A)$ é aberto.

3. Seja X um e.v.n. real e $f : X \to \mathbb{R}$ linear, $f \neq 0$. Sejam $A, B \subset X$ abertos tais que $f(a) \leq f(b)$ para todo $a \in A$ e $b \in B$. Mostre que $f(a) < f(b)$ para todo $a \in A$ e $b \in B$.

4. Seja X um e.v.n. e Y um subespaço vetorial de X. Mostre que são equivalentes:
   (a) Y é denso em X.
   (b) Se $f \in X^*$ e $f|_Y = 0$, então $f = 0$.

5. Seja $\mathcal{P}$ o espaço vetorial dos polinômios em uma variável com coeficientes reais. Denote por $\mathcal{P}_+$ e $\mathcal{P}_-$ o conjunto dos polinômios com coeficiente de mais alto grau positivo e negativo, respectivamente. Mostre que estes conjuntos são convexos e que não podem ser separados por um hiperplano.