Análise Funcional Aplicada

Prof. Maicon Marques Alves

Quarta Lista

1. Mostre que todo espaço vetorial normado de dimensão finita é um espaço de Banach reflexivo.

2. Seja X um espaço de Banach. Mostre que X é reflexivo se e somente se X^* é reflexivo.

3. Seja $X = \ell_\infty$ (munido com a norma infinito). Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $\pi_n : X \to \mathbb{R}$ definida por $\pi_n(x) = x_n$, onde $x = (x_n)$. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n \in B_{X^*}$, mas que a sequência (π_n) não tem subsequência convergente na topologia fraca* de X^*. Isso representa alguma contradição ao Teorema de Banach-Alaoglu?

4. Mostre que um espaço de Banach X é reflexivo se e somente se $\sigma(X^*, X^{**}) = \sigma(X^*, X)$.

5. Seja X um espaço de Banach e $M \subset X$ um subespaço vetorial. Mostre que
   (a) $\sigma(M, M^*) = \{\mathcal{O} \cap M \mid \mathcal{O} \in \sigma(X, X^*)\}$.
   (b) se X é reflexivo e M é fechado, então M é reflexivo.