Análise Funcional Aplicada

Prof. Maicon Marques Alves

Sexta Lista

1. Dê um exemplo de um espaço reflexivo e não uniformemente convexo.

2. Mostre as seguintes generalizações da Desigualdade de Hölder ($1 \leq p, q, s \leq \infty$):

$$\|uv\|_s \leq \|u\|_p \|v\|_q, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}\,.$$

$$\|uvw\|_s \leq \|u\|_p \|v\|_q \|w\|_r, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{s}.$$

3. Construa um isomorfismo isométrico $T : \ell_\infty \to \ell_1^*$. É possível construir um isomorfismo isométrico de ℓ_1 em ℓ_∞^*?

4. Mostre que ℓ_1 e ℓ_∞ não são reflexivos.

5. Sejam c_0 e c os espaços das sequências que convergem para zero e convergentes, respectivamente (ambos munidos com a norma infinito). Mostre que

   (a) Para todo $1 \leq p < \infty$,
   $$\ell_p \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty.$$

   (b) c_0 e c são subespaços fechados de ℓ_∞.

   (c) Existe um isomorfismo isométrico de ℓ_1 em c_0^*.

   (d) c_0 e c não são reflexivos.

   (e) c_0 e c são separáveis.

6. Considere o espaço ℓ_p, para $1 \leq p \leq \infty$. Para cada $n \geq 1$, seja e_n o elemento de ℓ_p cuja n-ésima coordenada é igual a um e as demais são iguais a zero. Mostre que

   (a) Se $p < \infty$, então (e_n) é uma sequência fracamente mas não fortemente convergente em ℓ_p.

   (b) $\{e_n\}$ é um subconjunto fechado mas não compacto de ℓ_p.

7. Seja $S = \{(x_n)_{n\geq 1} \mid n^p\, x_n \to 0,\ n \to \infty,\ \forall p \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $S \subset \ell^p,\ \forall p \in \mathbb{N}$.

8. Seja $1 \leq p < \infty$ e $q > 1$ o cojugado de p. Mostre que

$$\|x\|_p = \max_{\|y\|_q=1} \Big|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\Big|,$$

onde $x = (x_n) \in \ell_p$ e $y = (y_n) \in \ell_q$.