# Análise Funcional Aplicada

Prof. Maicon Marques Alves

## Sétima Lista

1. Mostre que todo espaço de Hilbert é reflexivo.

2. Mostre que todo espaço com produto interno é uniformemente convexo.

3. Seja $\{x_n\}_{n=1}^N$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert real $\mathcal{H}$. Mostre que a função

$$\mathcal{H} \ni x \mapsto \left\| x - \sum_{n=1}^{N} c_n \, x_n \right\| \in \mathbb{R}$$

atinge seu valor mínimo quando $c_n = \langle x, x_n \rangle$, para todo $1 \leq n \leq N$.

4. Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $(\cdot, \cdot)$ protudos internos em $\mathcal{H}$ e $\| \cdot \|$ norma em $\mathcal{H}$ tais que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{(x, x)}$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle = (\cdot, \cdot)$.

5. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{H}^*$ o seu dual, munido com a norma dual $\| \cdot \|_*$. Exiba um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ em $\mathcal{H}^*$ tal que $\| \cdot \|_* = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_*}$. Conclua que $\mathcal{H}^*$ é um espaço de Hilbert.

6. Seja $X$ um espaço com produto interno, $(x_n)$ uma sequência em $X$ e $x \in X$. Mostre que $x_n \to x$ se e somente se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\| \to \|x\|$.

7. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert de dimensão infinita e $\{x_n\}_{n \geq 1}$ um subconjunto ortonormal de $\mathcal{H}$. Mostre que $(x_n)$ define uma sequência em $\mathcal{H}$ que converge fracamente para zero e que não tem subsequências fortemente convergentes.

8. Mostre que $\ell_p$ é Hilbert se e somente se $p = 2$.

9. Seja $E := \{(x_n) \in \ell_2 \mid x_{2k} = 0 \quad \forall k \geq 0\}$. Mostre que $E$ é fechado e encontre $E^\perp$.

10. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $M \subset \mathcal{H}$ um subespaço vetorial. Mostre que $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$.

11. Em um espaço com produto interno, mostre que se $x_n \rightharpoonup x$ e $v_n \to v$, então $\langle x_n, v_n \rangle \to \langle x, v \rangle$.