Análise Funcional Aplicada

Prof. Maicon Marques Alves

Oitava Lista

1. Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Mostre que $R(T)$ é fechado se e somente se $R(T^*)$ é fechado.

2. Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Mostre que T é inversível se e somente se T^* é inversível. Mostre ainda que se T é inversível, então $(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$.

3. Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e M subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Mostre que a projeção ortogonal sobre M é o único operador linear limitado P tal que $P^2 = P$, $P^* = P$ e $R(P) = M$.

4. Seja $E := \{f \in L^2[-1,1] \mid \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0\}$. Determine $E^\perp$.

5. Seja X um espaço de Banach, quando munido com as normas $\|\cdot\|$ e $[\,\cdot\,]$. Mostre que se existe $k > 0$ tal que $\|\cdot\| \leq k\,[\,\cdot\,]$, então $\|\cdot\|$ e $[\,\cdot\,]$ são equivalentes. Dica: Use o Teorema de Aplicação Aberta.

6. Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Mostre que $R(T)$ é fechado se e somente se existe $\alpha > 0$ tal que $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$ para todo $x \in N(T)^\perp$.

7. Seja $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, onde X e Y são espaços de Banach. Suponha que existe $\alpha > 0$ tal que $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$ para todo $x \in X$. Mostre que T é injetivo, $\operatorname{Ran} T$ é fechado e $T^{-1} \in \mathcal{B}(\operatorname{Ran} T, X)$ com $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$.

8. Sejam X e Y espaços de Banach reais e $B : X \times Y \to \mathbb{R}$ um funcional bilinear, isto é, B é tal que $B(x, \cdot)$ e $B(\cdot, y)$ são funcionais lineares, sempre que $x \in X$ e $y \in Y$. Mostre que se $B(x, \cdot)$ e $B(\cdot, y)$ são contínuos, para qualquer $x \in X$ e $y \in Y$, então B é contínuo. Dica: Use o Teorema de Banach-Steinhaus.