Análise Funcional Aplicada

Prof. Maicon Marques Alves

Décima Lista

1. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo e $U \in B(\mathcal{H})$ um *operador unitário*. Mostre que
$$\lambda \in \sigma(U) \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$$

2. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo e $A \in B(\mathcal{H})$ um *operador normal*, isto é, A é tal que $A^*A = AA^*$. Mostre que $r_\sigma(A) = \|A\|$ e que $\sigma_r(A) = \emptyset$.

3. Seja $T : \ell_2 \to \ell_2$ definido por
$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) = \left(x_2, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{3}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{n}, \ldots\right).$$
Mostre que T é compacto e $\sigma_p(T) = \{0\}$. Conclua que $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0\}$.

4. Seja $T : \ell_2 \to \ell_2$ definido por
$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots\right).$$
Mostre que T é compacto e $\sigma_p(T) = \emptyset$. Conclua que $\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}$.

5. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo. Seja $T \in B(\mathcal{H})$ um operador compacto com imagem fechada, isto é, suponha que $R(T)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Mostre que $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.

6. Seja $R : \ell_2 \to \ell_2$ definido por
$$R(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$
   (a) Calcule R^*.
   (b) Mostre que $\|R\| = 1$.
   (c) Mostre que $\sigma_p(R) = \emptyset$.
   (d) Mostre que $\sigma_r(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\}$.
   (e) Mostre que $\sigma_c(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

7. Seja $M : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ definido por $(Mf)(x) = x\,f(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Mostre que

$$\sigma_p(M) = \emptyset, \quad \sigma_c(M) = \sigma(M) \text{ e } \sigma_r(M) = \emptyset.$$

Mostre também que $\sigma(M) = [0,1]$.