Análise Funcional Aplicada - 2023.01
Primeira Prova

Nome:____

Assinatura:____

---

1) (2.0 Pontos) Seja X um espaço localmente convexo munido com uma família de seminormas $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in L}$ e

$$V = V(x_0, \rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}, \dots, \rho_{\alpha_k}, \varepsilon) = \{x \in X \ | \ \rho_{\alpha_i}(x - x_0) < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, k\}$$

uma vizinhança de $x_0 \in X$. Dado $y \in V$, construa (explicitamente) uma vizinhaça

$$W = W(y, \rho_{\beta_1}, \rho_{\beta_2}, \dots, \rho_{\beta_\ell}, \delta) = \{x \in X \ | \ \rho_{\beta_i}(x - y) < \delta, \quad i = 1, \dots, \ell\}$$

de y tal que

$$W \subset V.$$

2) (2.0 Pontos) Seja X um e.v.n. e C um subconjunto convexo de X tal que $0 \in \operatorname{int} C$. Mostre que se C é aberto, então

$$C = \{x \in X \mid \rho_C(x) < 1\},$$

onde ρ_C denota o Funcional de Minkowski de C.

3) (2.0 Pontos) Seja X um e.v.n. e sejam $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ funcionais lineares em X tais que

$$f_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad f_0(x) = 0.$$

Mostre que existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ satisfazendo

$$f_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, f_j.$$

4) (2.0 Pontos) Mostre que um espaço de Banach X é reflexivo se e somente se o seu dual X^* é reflexivo.

5) (2.0 Pontos) Seja X um espaço de Banach. Para $M \subset X$ e $N \subset X^*$ subespaços vetoriais defina

$$M^0 = \{f \in X^* \mid \ f(x) = 0 \ \ \forall x \in M\}, \qquad N^+ = \{x \in X \mid f(x) = 0 \ \ \forall f \in N\}.$$

Mostre que

$$\left(M^0\right)^+ = \overline{M},$$

onde o fecho é tomado na topologia forte de X.

Prof. Maicon Marques Alves
Florianópolis, 12 de abril de 2023.