Análise Funcional Aplicada - 2023.01
Segunda Prova

Nome:____

Assinatura:____

---

1) (3.0 Pontos) V ou F, com prova ou contra-exemplo.

(a) Todo espaço de Banach reflexivo é uniformemente convexo.

(b) Em um espaço de Hilbert, se $x_n \rightharpoonup x$ e $v_n \to v$, então $\langle x_n, v_n \rangle \to \langle x, v \rangle$.

(c) Se M é subespaço de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então

$$\mathcal{H} = \overline{M} \oplus M^{\perp} = M^{\perp} \oplus (M^{\perp})^{\perp}.$$

2) (2.0 Pontos) Seja X um espaço de Banach reflexivo. Seja (x_n) uma sequência em X tal que, para todo $f \in X^*$, $\big(f(x_n)\big)$ é convergente. Mostre que (x_n) é fracamente convergente.

3) (2.0 Pontos) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert com base ortonormal $\{x_n\}_{n\geq 1}$ e seja (y_k) uma sequência em $\mathcal{H}$. Mostre que são equivalentes:

(a) Para todo $x \in \mathcal{H}$, $\langle x, y_k \rangle \to 0$.

(b) Para todo $n \geq 1$, $\langle x_n, y_k \rangle \to 0$ e (y_k) é limitada.

4) (1.0 Ponto) Seja c o espaço das sequências convergentes e c_0 o espaço das sequências que convergem para zero, ambos munidos com a norma infinito. Mostre que c_0 e c são separáveis.

5) (2.0 Pontos) Seja $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert e $(\cdot, \cdot)$ um produto interno em $\mathcal{H}$ tal que

$$(x, x) \leq C\langle x, x \rangle \qquad \forall x \in \mathcal{H},$$

onde $C > 0$. Mostre que existe $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$(x, y) = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Prof. Maicon Marques Alves
Florianópolis, 31 de maio de 2023.