Análise Funcional Aplicada - 2023.01
Terceira Prova

Nome:____

Assinatura:______________________________________

---

1. (2.0 Pontos) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador auto-adjunto. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

   (i) $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

   (ii) $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

2. (2.0 Pontos) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo e $U \in B(\mathcal{H})$ um *operador unitário*. Mostre que
$$\lambda \in \sigma(U) \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1.$$

3. (2.0 Pontos) Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ espaços de Hilbert de dimensão infinita e seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ um operador compacto e não-nulo. Mostre que existem conjuntos ortonormais $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ em $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$, respectivamente, e números reais $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \mu_n \geq \cdots > 0$ satisfazendo, para todo n,
$$Tx_n = \mu_n y_n,$$
$$T^* y_n = \mu_n x_n.$$

4. (2.0 Pontos) Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach com imersão $X \subset Y$ é compacta. Seja $p : X \to \mathbb{R}$ uma seminorma em X tal que a aplicação $x \mapsto p(x) + \|x\|_Y$ define uma norma em X equivalente a norma $\|\cdot\|_X$. Mostre que
$$N := \{x \in X \ \mid \ p(x) = 0\}$$
é um espaço de dimensão finita.

5. (2.0 Pontos) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in B(\mathcal{H})$. Mostre que T é compacto se e somente se T^* é compacto.

Prof. Maicon Marques Alves

Florianópolis, 30 de junho de 2022.