MTM3112 - Álgebra Linear
Quarta Lista

Prof. Maicon Marques Alves

1. Sejam $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$, $\beta_1 = \{(-1,1),(1,1)\}$, $\beta_2 = \{(\sqrt{3},1),(\sqrt{3},-1)\}$ e $\beta_3 = \{(2,0),(0,2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Ache as matrizes mudança de base:
      (i) $[I]_{\beta}^{\beta_1}$
      (ii) $[I]_{\beta_1}^{\beta}$
      (iii) $[I]_{\beta_2}^{\beta}$
      (iv) $[I]_{\beta_3}^{\beta}$

   (b) Ache as coordenadas do vetor $v = (3,-2)$ em relação às bases:
      (i) β
      (ii) β_1
      (iii) β_2
      (iv) β_3

   (c) Suponha que as coordenadas de um vetor v em relação à base β_1 são dadas por

   $$[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Encontre as coordenadas do vetor v em relação às bases:
      (i) β
      (ii) β_2
      (iii) β_3

2. Suponha que α e α' são bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ e que

   $$[I]_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   Ache

   (a) $[v]_{\alpha}$ onde $[v]_{\alpha'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

   (b) $[v]_{\alpha'}$ onde $[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. No espaço das matrizes triangulares superiores, considere as bases β e β' dadas por

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\beta' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ache a matrix mudança de base $[I]_{\beta}^{\beta'}$.

4. Se α é base de um espaço vetorial, qual é a matriz de mudança de base $[I]_{\alpha}^{\alpha}$?

5. Seja $T : V \to W$ uma função. Mostre que
   (a) Se T é uma transformação linear, então $T(0) = 0$.
   (b) Se $T(0) \neq 0$, então T não é uma transformação linear.

6. Determine quais das aplicações abaixo são transformações lineares. Justifique a sua resposta.
   (a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T_1(x, y) = (x + y, x - y)$.
   (b) $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad T_2(x, y) = xy$.
   (c) $T_3 : M(2, 2) \to \mathbb{R}, \quad T_3\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
   (d) $T_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T_4(x) = |x|$.

7. (a) Ache uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$.
   (b) Encontre $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3, 2)$.

8. Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$? Ache $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$.

9. Qual é a transformação linear $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $S(3, 2, 1) = (1, 1)$ e $S(0, 1, 0) = (0, -2)$ e $S(0, 0, 1) = (0, 0)$?

10. Determine a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ tal que $T(1) = x$, $T(x) = 1 - x^2$ e $T(x^2) = x + 2x^2$.

Gabarito Parcial

1 (a) (i) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6 (a) Sim

(b) Não

(c) Não

(d) Não

7 (a) $T(x, y, z) = (2x + y, y - z)$

10 $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + (a_0 + a_2)x + (2a_2 - a_1)x^2$