# MTM3112 - Álgebra Linear
# Sexta Lista
**Prof. Maicon Marques Alves**

1. Sejam $\alpha = \{(1,-1),(0,2)\}$ e $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente e suponha que
$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Ache $T(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) Se $S(x,y) = (2y, x-y, x)$, ache $[S]^\alpha_\beta$.
   (c) Ache uma base $\gamma$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]^\alpha_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Seja
$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
a base canônica do espaço $M(2,2)$ das matrizes $2 \times 2$. Seja $T : M(2,2) \to \mathbb{R}^2$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+d, b+c)$.
   (a) Ache $[T]^\beta_\alpha$, onde $\alpha$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Suponha que $S : \mathbb{R}^2 \to M(2,2)$ é tal que $[S]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ache $S(x,y)$, para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e se possível $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo $S(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ache vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$ tais que
   (a) $T(u) = u$.
   (b) $T(v) = -v$.

4. Suponha que
$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

onde $\alpha = \{(-1,1),(1,0)\}$ e $\beta = \{(1,1,-1),(2,1,0),(3,0,1)\}$ são bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

Encontre a expressão de $T(x,y)$ e $[T]$.

5. Suponha que

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

é a matriz que representa a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ nas bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Encontre $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (2,4,-2)$.

6. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear com matriz

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

onde $\beta$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $\beta' = \{(1,0,1),(-2,0,1),(0,1,0)\}$. Encontre a imagem do vetor $v = (2,-3)$ por $T$.

7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear com matriz

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $\beta = \{(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1)\}$ e $\beta' = \{(-1,0),(0,-1)\}$.

   (a) Determine uma base para $Im(T)$.
   (b) Determine uma base para $N(T)$.
   (c) $T$ é injetora? Sobrejetora?

8. Mostre que a matriz que representa a transformação identidade $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $I(v) = v$ em qualquer base de $\mathbb{R}^n$ é a matriz identidade de ordem $n \times n$.

9. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to M(2,2)$ uma transformação linear tal que

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha$ e $\beta$ denotam as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $M(2,2)$, respectivamente.

   (a) Determine $T(1,0)$, $T(0,1)$ e $T(2,3)$.

(b) Determine $T(x,y)$ para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Encontre $(a,b)$ tal que
$$T(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

10. Sejam $T$ e $S$ definidas por $T(x,y) = (x - 2y, y)$ e $S(x,y) = (2x, -y)$. Determine $S+T$, $T-S$, $2S+4T$, $S \circ T$, $T \circ S$ e $S \circ S$.

11. Sejam $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas por $S(x,y,z) = (x+y, z, x-y, y+z)$ e $T(x,y) = (2x+y, x-y, x-3y)$. Verifique diretamente que a identidade
$$[S \circ T] = [S][T]$$
é verdadeira.

12. Sejam $T$ e $S$ definidas em $\mathbb{R}^3$ por $T(x,y,z) = (x-z, y, z)$ e $S(x,y,z) = (x, 2y, x-y)$. Determine $[S \circ T]$ e $[T \circ S]$.

13. Suponha que os pontos do plano $(2,-1)$ e $(-1,4)$ são vértices de um quadrado. Use a matriz de rotação para determinar os outros vértices.

14. Suponha que os pontos do plano $(-1,-1)$, $(4,1)$ e $(a,b)$ sejam vértices de um triângulo retângulo isósceles reto em $(-1,-1)$. Use a matriz de rotação para determinar o ponto $(a,b)$.

15. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma reflexão através da reta $y = 3x$. Encontre $T(x,y)$ e uma base $\alpha$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

## Gabarito Parcial

1 (a) $T(x,y) = (\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}, 2x+y)$

(b) $[S]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{3} & \frac{20}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$

(c) $\gamma = \{(1,1,1), (-1,-1,2), (3,-3,0)\}$

2 (a) $[T]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $S(x,y) = \begin{bmatrix} 2x+y & x-y \\ -x & y \end{bmatrix}$

3 (a) $u = (x, -x)$.

(b) $v = (x, 0)$.

5 $v = (2, 0)$.

6 $(11, -13, 2)$

7 (a) Conclua primeiro que $Im(T) = \mathbb{R}^2$.

(b) Mostre primeiro que $N(T) = \{(x, x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(c) T não é injetora e é sobrjetora.

9 (b) $T(x,y) = \begin{bmatrix} x & 2x+y \\ 3x-2y & -x+2y \end{bmatrix}$

(c) Não existe $(a, b)$.