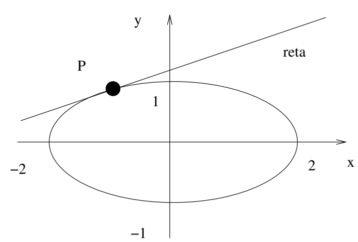
Cálculo C (2011/2): Lista 2

Martin Weilandt

5 de Setembro de 2011

1. Considere a elipse E dada pelos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Queremos calcular a reta tangente no ponto $P := (-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ usando uma parametrização de E:



   Considere a parametrização $\mathbf{R}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e mostre que $\mathbf{R}(t) \in E$ para todo t. Determine $t_0 \in [0,2\pi]$ tal que $\mathbf{R}(t_0) = P$. Por definição a reta tangente é a curva parametrizada por $\mathbf{S}(t) := P + t\mathbf{R}'(t_0)$, $t \in \mathbb{R}$. Determine $\mathbf{S}$.

2. (Stewart 13.4-18) Determine o vetor posição de uma partícula, dada a sua aceleração, e suas velocidade e posição iniciais:
$$\mathbf{a}(t) = t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{j}.$$

3. (Stewart 13.4-28) No beisebol, um batedor rebate uma bola, que está 3 pés (0,9144 metros) acima do chão, em direção á parte central da cerca do campo, que tem 10 pés (3,048 metros) de altura e dista 400 pés (121,92 metros) da base do lançamento. A bola deixe o bastão com uma velocidade escalar de 115 pés por segundo (35,052 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$) e com ângulo de 50° acima da horizontal. Foi *home run*? (Em outras palavras, a bola passou por cima da cerca?)

4. (opcional) Seja $\mathbf{R}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ uma curva lisa parametrizada pelo comprimento de arco e suponhamos que $\mathbf{R}''(s) \neq 0$ para todo $s \in [a,b]$. Lembre que definimos $\mathbf{T} := \frac{\mathbf{R}'}{|\mathbf{R}'|}$, $\mathbf{N} := \frac{\mathbf{T}'}{|\mathbf{T}'|}$, $\mathbf{B} := \mathbf{T} \times \mathbf{N}$. Além da curvatura κ uma outra função interessante associada a $\mathbf{R}$ é a *torção* definida por $\tau(s) := \langle \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle \in \mathbb{R}$, $t \in [a,b]$.

(a) (exemplo) Considere o círculo de raio $r > 0$ parametrizado por $\mathbf{R}(s) := r(\cos(\frac{t}{r})\mathbf{i}+\operatorname{sen}(\frac{t}{r})\mathbf{j})$, $t \in [0,2\pi]$, verifique que essa parametrização é por comprimento de arco (i.e., $|\mathbf{R}'| \equiv 1$) e que $\tau \equiv 0$.

(b) (caso geral) Mostre a terceira Fórmula de Frenet-Serret para $\mathbf{R}$ geral: $\mathbf{B}'(s) = -\tau(s)\mathbf{N}(s)$ para todo $s \in [a,b]$. (Dica: Como $\mathbf{T}$,$\mathbf{N}$,$\mathbf{B}$ formam uma base ortogonal de vetores unitários, podemos escrever

$$\mathbf{B}'(s) = \langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{T}(s)\rangle \mathbf{T}(s) + \langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s)\rangle \mathbf{N}(s) + \langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{B}(s)\rangle \mathbf{B}(s).$$

Para calcular os coeficientes $\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{T}(s)\rangle$, $\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s)\rangle$, $\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{B}(s)\rangle$ use que $\frac{d}{ds}\langle \mathbf{B},\mathbf{T}\rangle = \frac{d}{ds}\langle \mathbf{B},\mathbf{N}\rangle = \frac{d}{ds}\langle \mathbf{B},\mathbf{B}\rangle = 0$.)

A terceira Fórmula de Frenet-Serret pode ser usada para mostrar que uma curva em $\mathbb{R}^3$ é contida em algum plano se e somente se $\tau \equiv 0$.

5. Seja $g\colon [0,\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$.

   (a) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ uma função continuamente derivável e consideremos a composta $h := f \circ g\colon [0,\infty)\times[0,2\pi) \to \mathbb{R}$. Usando a Regra da Cadeia, escreve as derivadas parciais $\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta)$, $\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta)$ em termos de $\frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta))$, $\frac{\partial f}{\partial y}(g(r,\theta))$ (e r, θ).

   (b) Aplique sua fórmula de (a) ao exemplo $f(x,y) = x^2y - x^2 + y^3$. Depois calcule as derivadas parciais deste $h = f \circ g$ sem Regra da Cadeia e compare os resultados.

6. (Strang 13.4-1) Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ determine $\nabla f(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), \mathbf{u}\rangle \in \mathbb{R}$. Depois determine $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P) \in \mathbb{R}$:

   (a) $f(x,y) = e^x \cos y$, $\quad \mathbf{u} = (4,-3)$, $\quad P = (0,\pi/2)$

   (b) $f(x,y) =$ distância entre (x,y) e $(0,3)$, $\quad \mathbf{u} = (-1,2)$, $\quad P = (1,1)$

7. Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ seja $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   (a) Desenhe um mapa de contorno de f (i.e., algumas curvas onde f é constante), por exemplo $f^{-1}(\frac{1}{4}), f^{-1}(\frac{1}{2}), f^{-1}(\frac{3}{4})$ e $f^{-1}(1)$.

   (b) Determine o gradiente $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ e adicione o campo gradiente ao seu desenho de (a).

   (c) Determine a direção $\mathbf{u}$ em que f aumenta mais rápido no ponto $P = (1,\sqrt{3})$ (i.e., determine $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $|\mathbf{u}| = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P) \geq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(P)$ para $|\mathbf{v}| = 1$).

8. Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e seja $\mathbf{R}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ uma curva em que f seja constante (i.e., a função $f \circ \mathbf{R}$ seja constante). Seja $c \in (a,b)$, $P := \mathbf{R}(c)$ e $\mathbf{u} := \mathbf{R}'(c) \in \mathbb{R}^3$. Usando a expressão $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P) = (f \circ \mathbf{R})'(c)$, mostre que $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P) = 0$.

Para mais informações veja `http://mtm.ufsc.br/~martin/calc-c/index.html`.