Cálculo C (2011/2): Lista 3

Martin Weilandt

5 de Setembro de 2011

1. (Strang 15.1) Desenhe setas em seis ou oito pontos para mostrar a direção e magnitude de cada campo vetorial:

   $$\text{(a) } x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} \qquad \text{(b) } y\mathbf{i}$$

2. (Strang 15.1) Os seguintes campos vetoriais $\mathbf{F}$ são conservativos. Para cada $\mathbf{F}$ determine um potencial, i.e. uma função derivável f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$. Depois calcule $\int_C^{\tan} \mathbf{F}$, onde C seja qualquer curva entre $(0,1)$ e $(-1,3)$.

   (a) $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + \mathbf{j}$

   (b) $\mathbf{F}(x,y) = (1/y)\mathbf{i} - (x/y^2)\mathbf{j}$

3. (Strang 15.2) Determine a seguinte integral curvilínea: $\int_C y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$ ao longo dum quadrado qualquer C cujos lados têm comprimento 3.

4. (Strang 15.2-21) Seja $a > 0$ e considere o círculo $C \subset \mathbb{R}^2$ dado por $x^2+y^2 = a^2$. A densidade seja $\rho(x,y) = x^2$. Calcule a massa $\int_C \rho$.

5. (Strang 15.2-31/32) Calcule as integrais $\int_{C_1}^{\tan} \mathbf{F} = \int_{C_1} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_1 \rangle$, $\int_{C_2}^{\tan} \mathbf{F} = \int_{C_2} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_2 \rangle$ ao longo de duas curvas C_1, C_2 entre $(0,0)$ e $(1,1)$. C_1 seja o segmento de reta (parametrizado por exemplo por $\mathbf{R}_1(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$) e C_2 seja a parábola parametrizada por $\mathbf{R}_2(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$.

   (a) $\mathbf{F}(x,y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$

   (b) $\mathbf{F}(x,y) = x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$

   Quais desses campos vetoriais são conservativos?

6. (Stewart 16.3-33) Suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial inverso do quadrado, ou seja,

   $$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

   para alguma constante c, onde $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Determine o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao mover um objeto de um ponto P_1 por um caminho para um ponto P_2 em termos da distância d_1 e d_2 desses pontos á origem.

7. (Strang 15.3-8) Seja C uma curva lisa simples que delimite uma região $D \subset \mathbb{R}^2$. Mostre que $\int_C (x^2y + 2x)\,\mathrm{d}y + xy^2\,\mathrm{d}x$ depende somente da área de D. É igual á area?

8. (Strang 15.3-11) Para $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\mathbf{F} = \nabla f$ mostre de três jeitos que $\int_C^{\tan} \mathbf{F} = 0$ ao longo do círculo C: $\mathbf{R}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
   (a) $\mathbf{F}$ é conservativo e portanto ...
   (b) Compute $\mathbf{F}$ a depois diretamente $\int_C^{\tan} \mathbf{F}$.
   (c) Compute a integral dupla no Teorema de Green.

Para mais informações veja `http://mtm.ufsc.br/~martin/calc-c/index.html`.