Cálculo C (2011/2): Lista 4

Martin Weilandt

30 de Outubro de 2011

1 Exercícios

1. (Strang 15.4) Calcule a área $A(S)$ para: S a parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ entre os planos $z = 4$ e $z = 9$. (Dica: S é o gráfico de $g(u,v) = u^2 + v^2$. Falta determinar D tal que $\mathbf{R}(D) = S$, onde $\mathbf{R}$ seja nossa parametrização $\mathbf{R}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + g(u,v)\mathbf{k}$ do gráfico de $g\colon D \to \mathbb{R}$.)

2. (Strang 15.4) Calcule a integral $\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{dS}$ para

   (a) $f(x,y,z) = xy$, S o triângulo dado por $x + y + z = 1,\ x,y,z \geq 0$. (Dica: Escreva S como gráfico. $g(u,v) =?$, $D =?$.)

   (b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, S o hemisfério superior (i.e. $z \geq 0$) da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (Dica: Use uma parametrização da esfera com θ, ϕ. Alternativa: Considere S como gráfico.)

3. (Strang 15.4) Considere a parametrização $\mathbf{R}(u,v) = u\mathbf{i} + (v+u)\mathbf{j} + (v + 2u+1)\mathbf{k}$, $(u,v) \in D$, duma superfície S orientada pela direção de $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}$. O domínio de $\mathbf{R}$ seja $D = [-1,1] \times [0,3]$. Consideremos o campo vetorial $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + \mathbf{k}$ em S.

   (a) Calcule $\mathbf{F} \circ \mathbf{R}(u,v)$, $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}$.

   (b) Calcule $\iint_S \mathbf{F}\,\mathrm{dS}$.

4. (Strang 15.4) Para o exemplo de 1 calcule o fluxo $\iint_S \mathbf{F}\,\mathrm{d}S$ para o campo vetorial $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. S seja orientada como gráfico (i.e. com orientação $\mathbf{N}$ tal que $N_3 > 0$).

5. (Stewart 16.5) Determine (i) o rotacional e (ii) o divergente do campo vetorial

   (a) $\mathbf{F}(x,y,z) = xyz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{k}$

   (b) $\mathbf{F}(x,y,z) = e^x \operatorname{sen} y\mathbf{i} + e^x \cos y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

   Estes campos são conservativos?

2 Dicas Adicionais

1. Para um gráfico S duma função $g\colon D \to \mathbb{R}$ vale (veja aula):
$$\iint_S \mathrm{dS} = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + 1}\, \mathrm{dA}(u,v).$$
Vocês deviam chegar à integral
$$\iint_D \sqrt{4(u^2+v^2)+1}\, \mathrm{dA}(u,v).$$
Depois apliquem coordenadas polares $(u,v) = (r\cos\phi, r\,\mathrm{sen}\,\phi)$ para obter
$$\iint_S \mathrm{dS} = 2\pi \int_2^3 r\sqrt{4r^2+1}\, \mathrm{d}r.$$
Uma substituição como $s = 4r^2+1$ vai dar o resultado.

2. (a) Usem $g(u,v) = 1-u-v$, $D = \{(u,v) \subset \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } u \geq 0,\ v \geq 0,\ u+v \leq 1\} = \{(u,v) \subset \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 0 \leq u \leq 1 \text{ e } 0 \leq v \leq 1-u\}$ (t.q.=tal que). Para um gráfico S duma função $g\colon D \to \mathbb{R}$ vale (vejam aula):
$$\iint_S f(x,y,z)\, \mathrm{dS} = \iint_D f(u,v,g(u,v)) \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + 1}\, \mathrm{dA}(u,v).$$
(b) Podemos usar a parametrização $\mathbf{R}(\theta,\phi) = \mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k}$ da esfera, aqui (hemisfério superior!) com $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ (i.e. $D = [0,\pi/2] \times [0,2\pi]$). Na aula já calculamos $\left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi}\right| = \mathrm{sen}\,\theta$. Agora é só usar a definição
$$\iint_S f(x,y,z)\, \mathrm{dS} = \iint_D (f \circ \mathbf{R}) \left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi}\right| \mathrm{dA}(\theta,\phi)$$
e calcular a integral ao lado direito. (Note que seguimos a convenção para a esfera e escrevemos (θ,ϕ) em vez de (u,v).)

3. Usem a fórmula
$$\iint_S \mathbf{F} = \iint_D \left\langle \mathbf{F} \circ \mathbf{R}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \right\rangle \mathrm{dA},$$
onde $\langle , \rangle$ denota o produto escalar.

4. Para $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ um campo vetorial e S o gráfico duma função $g\colon D \to \mathbb{R}$ (i.e. S é parametrizada por $\mathbf{R}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + g(u,v)\mathbf{k}$) temos a fórmula
$$\iint_S \mathbf{F}\, \mathrm{dS} = \iint_D \left(-(F_1 \circ \mathbf{R})\frac{\partial g}{\partial u} - (F_2 \circ \mathbf{R})\frac{\partial g}{\partial v} + F_3 \circ \mathbf{R} \right) \mathrm{dA}.$$

5. Apliquem as definições (e depois se lembrem que $\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$).

Para mais informações veja `http://mtm.ufsc.br/~martin/calc-c/index.html`.