Cálculo C (03312): Prova 1 Soluções

Martin Weilandt

24 de Setembro de 2011(prova no dia 21/09/11)

1. (a)
$$\begin{aligned}\mathbf{V}(t) &= \mathbf{R}'(t) = 4t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j}\\ |\mathbf{V}(t)| &= \sqrt{16t^2 + 9t^2} = 5t \text{ e portanto}\\ \mathbf{T}(t) &= \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}\end{aligned}$$

   (b)
$$\mathbf{T}'(t) = 0 \Rightarrow \kappa(t) = 0$$

2. (a)
$$\begin{aligned}x(t) &= 20\cos(30^\circ)t = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}t = 10\sqrt{3}t\\ y(t) &= 20\,\mathrm{sen}(30^\circ)t - 5t^2 = 10t - 5t^2 = 5t(2-t)\end{aligned}$$

   (b) $0 = y(t_0) = 5t_0(2 - t_0)$ e portanto $t_0 = 0$ ou $t_0 = 2$. Mas nos procuramos $t_0 > 0$, i.e. $t_0 = 2$. Agora calculamos $x(t_0) = x(2) = 20\sqrt{3}$.

3.
$$\begin{aligned}\mathbf{R}'(t) &= 2t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}\\ |\mathbf{R}'| &= \sqrt{9t^2} = 3t\\ \phi_L(t) &= \int_0^t 3u\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2}t^2 \text{ e portanto}\\ \phi_L^{-1}(s) &= \sqrt{\frac{2}{3}s}\end{aligned}$$

   Agora calculamos
$$\begin{aligned}\widehat{R}(s) &= \widehat{R}(\sqrt{\frac{2}{3}s}) = \frac{2}{3}s\mathbf{i} - \frac{2}{3}s\mathbf{j} + \frac{1}{3}s\mathbf{k}\\ \widehat{R}'(s) &= \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}\\ |\widehat{R}'(s)| &= \frac{1}{3}\sqrt{4+4+1} = 1\end{aligned}$$

4. Primeiro calculamos

$$\mathbf{V}(t) = \int_0^t \mathbf{a}(u)\,\mathrm{d}u + \mathbf{V}(0) = \int_0^t (-u\mathbf{i} + \operatorname{sen} u\mathbf{k})\,\mathrm{d}u + 2\mathbf{j}$$
$$= \left(-\frac{u^2}{2}\mathbf{i} - \cos u\mathbf{k}\right)\Big|_0^t + 2\mathbf{j} = -\frac{t^2}{2}\mathbf{i} + (-\cos t + 1)\mathbf{k} + 2\mathbf{j}$$

e depois podemos calcular

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t) &= \int_0^t \mathbf{V}(u)\,\mathrm{d}u + \mathbf{R}(0)\\ &= \int_0^t (-\frac{u^2}{2}\mathbf{i} + (-\cos u + 1)\mathbf{k} + 2\mathbf{j})\,\mathbf{d}u - \mathbf{i}\\ &= \left(-\frac{u^3}{6}\mathbf{i} + 2u\mathbf{j} + (-\operatorname{sen} u + u)\mathbf{k}\right)\Big|_0^t - \mathbf{i}\\ &= (-\frac{t^3}{6} - 1)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (-\operatorname{sen} t + t)\mathbf{k}\end{aligned}$$

5. (a) Usamos nossa parametrização comum do segmento de reta C de P para Q:

$$\mathbf{R}(t) = P + t(Q-P) = (-1{,}2) + t(4{,}-1) = (4t-1)\mathbf{i} + (-t+2)\mathbf{j}, \quad t \in [0{,}1]$$

Usando esta paremetrização $\mathbf{R}$ (e notando que $\mathbf{R}'(t) = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$), calculamos

$$\begin{aligned}\int_C^{\tan} \mathbf{F} &= \int_C (y+1)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 [(-t+3)\cdot 4 + (4t-1)\cdot(-1)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 [-4t - 4t + 13]\,\mathrm{d}t\\ &= -8\cdot\frac{1}{2} + 13 = 9.\end{aligned}$$

(b) Suponhamos que não queiramos adivinhar. Nós sabemos que tem de valer $\nabla f \overset{(*)}{=} \mathbf{F}$. Em particular, $\frac{\partial f}{\partial x}(x{,}y) = y + 1$. Integrando esta equação em relação a x (integral indefinida), obtemos

$$f(x{,}y) = (y+1)x + g(y).$$

(Lembramos que a uma integral indefinida sempre temos de adicionar alguma constante para obter todas as primitivas. Aqui em duas variáveis nós chamamos essa constante $g(y)$, pois só sabemos que ela tem de independer de x mas ainda pode depender de y.)
Derivar em relação a y implica

$$g'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x{,}y) - x.$$

Aplicando a equação (*) mais uma vez, obtemos $g'(y) = x - x = 0$ e portanto g tem de ser constante. Mas o texto pediu só uma função potencial e escolhemos $g(y) = 0$. Assim obtemos $f(x,y) = (y+1)x + 0 = x(y+1)$ como uma função potencial de $\mathbf{F}$. (Quem quiser pode verificar aqui que realmente $\nabla f = \mathbf{F}$ mas não é necessário.)

(c) Como $\mathbf{F} = \nabla f$, temos $\int_C \mathbf{F} = f(Q) - f(P) = 6 + -(-3) = 9$.

(d)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x,y) &= \langle (\nabla f)(x,y), \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{F}(x,y), \mathbf{u} \rangle \\ &= 4(y+1) - 1 \cdot x = -x + 4y + 4 \end{aligned}$$