Cálculo C (03212): Prova 1

Prof.: Martin Weilandt

21 de setembro 2011

1. Considere a curva
$$\mathbf{R}(t) = (1+2t^2)\mathbf{i} - \frac{3}{2}t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad t \geq 1.$$
   (a) (1P) Calcule $\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t)$ e $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{V}(t)}{|\mathbf{V}(t)|}$.
   (b) (0,5P) Mostre que para a curvatura $\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{V}(t)|}$ temos $\kappa(t) = 0$ para todo t.

2. Considere o trajeto dum projétil em $\mathbb{R}^2$ dado por
$$\mathbf{R}(t) = \underbrace{v_0 \cos(\alpha) t}_{x(t)}\,\mathbf{i} + \underbrace{(v_0 \operatorname{sen}(\alpha) t - \frac{1}{2}gt^2)}_{y(t)}\,\mathbf{j}.$$
   Nós usamos $g = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°$ e $v_0 = 20$.
   (a) (0,5P) Escreva $x(t)$ e $y(t)$ para nosso caso (sem uso de g, α, v_0, sen ou cos no resultado final).
   (b) (1P) Determine o instante e a distância de impacto do projétil, i.e., determine o instante exato $t_0 > 0$ tal que $y(t_0) = 0$ e calcule a distância $x(t_0)$ da origem.

3. Considere a curva
$$\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}, \quad t \geq 0.$$
   (a) (1P) Para $t \geq 0$ calcule o comprimento $\phi_L(t) = L(\mathbf{R}_{|[0,t]}) = \int_0^t |\mathbf{R}'(u)|\,\mathrm{d}u$ da curva entre os instantes 0 e t.
   (b) (1P) Calcule a reparametrização $\widehat{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \circ \phi_L^{-1}$ de $\mathbf{R}$ por comprimento de arco. Explicitamente verifique $|\widehat{\mathbf{R}}'(s)| = 1$ para todo $s \geq 0$.

4. (2P) Determine o vetor posição $\mathbf{R}\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ duma partícula, dados
$$\mathbf{R}(0) = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{V}(0) = 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}(t) = -t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{k}.$$
   Dica: Use as definições $\mathbf{a} = \mathbf{V}'$, $\mathbf{V} = \mathbf{R}'$ e aplique duas vezes o teorema $\int_s^t \mathbf{S}'(u)\,\mathrm{d}u = \mathbf{S}(t) - \mathbf{S}(s)$ (que vale para qualquer curva $\mathbf{S}$).

5. Considere o seguinte campo vetorial com domínio $\mathbb{R}^2$:
$$\mathbf{F}(x,y) = (y+1)\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$
   Seja C o segmento de reta de $P = (-1,2)$ para $Q = (3,1)$.
   (a) (1P) Calcule $\int_C^{\tan} \mathbf{F}$ usando uma parametrização conveniente de C.
   (b) (1P) Determine uma função potencial f de $\mathbf{F}$. (Use o algoritmo da aula ou adivinhe f e verifique que $\nabla f = \mathbf{F}$.)
   (c) (0,5P) Calcule $\int_C^{\tan} \mathbf{F}$ usando o potencial f de (b) (sem calcular a integral curvilínea do jeito em (a)).
   (d) (0,5P) Calcule a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x,y) = \langle (\nabla f)(x,y), \mathbf{u} \rangle$ para $\mathbf{u} = (4,-1)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.