Cálculo C (03220): Prova 1

Prof.: Martin Weilandt

20 de setembro 2011

1. Considere uma partícula com vetor posição

$$\mathbf{R}(t) = \ln(4t^2)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^3\mathbf{k}, \quad t \geq \frac{1}{10}.$$

   (a) (1P) Calcule a velocidade $\mathbf{V} = \mathbf{R}'$ e a aceleração $\mathbf{a} = \mathbf{R}''$.

   (b) (0,5P) Para qual $t_0 \geq \frac{1}{10}$ temos $\mathbf{R}(t_0) = (0, 1, \frac{1}{4})$? Mostre que $|\mathbf{a}(t_0)| = 10$.

2. Considere a curva

$$\mathbf{R}(t) = \operatorname{sen}(2t)\mathbf{i} - \cos(2t)\mathbf{j} - 2\sqrt{3}t\mathbf{k}, \quad t \geq 0.$$

   (a) (1P) Para $t \geq 0$ calcule o comprimento $\phi_L(t) = L(\mathbf{R}_{|[0,t]}) = \int_0^t |\mathbf{R}'(u)| \, \mathrm{d}u$ da curva entre os instantes 0 e t.

   (b) (1P) Calcule a reparametrização $\widehat{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \circ \phi_L^{-1}$ de $\mathbf{R}$ por comprimento de arco. Calcule explicitamente que $|\widehat{\mathbf{R}}'(s)| = 1$ para todo $s \geq 0$.

3. (2P) Determine o vetor posição $\mathbf{R}\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ duma partícula, dados

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{V}(0) = -\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}(t) = \cos t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}.$$

   Dica: Use as definições $\mathbf{a} = \mathbf{V}'$, $\mathbf{V} = \mathbf{R}'$ e aplique duas vezes o teorema $\int_s^t \mathbf{S}'(u) \, \mathrm{d}u = \mathbf{S}(t) - \mathbf{S}(s)$ (que vale para qualquer curva $\mathbf{S}$).

4. Considere a função $f(x, y) = (4x^2 + y^2)^{-1}$ com domínio $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

   (a) (1P) Determine o gradiente $\nabla f(x, y)$.

   (b) (1P) Para a curva $\mathbf{R}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$, $t \in \mathbb{R}$, mostre $\langle \mathbf{R}'(t), \nabla f(\mathbf{R}(t)) \rangle = 0$.

Veja página 2 também!

5. Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ o círculo de raio 1 com centro na origem $(0,0)$ orientado no sentido anti-horário e considere o seguinte campo vetorial com domínio $\mathbb{R}^2$:
$$\mathbf{F}(x,y) = x^2y\mathbf{i} - x^3\mathbf{j}.$$
   (a) (1P) Calcule $\int_C^{\tan} \mathbf{F}$ usando uma parametrização conveniente de C (sem o Teorema de Green). Você pode usar $\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \pi$.
   (b) (1P) Calcule $\int_C^{\tan} \mathbf{F}$ usando o Teorema de Green.
   (c) (0,5P) $\mathbf{F}$ é conservativo? Justifique sua resposta.