Cálculo C (03212): Prova 2

Prof.: Martin Weilandt

1 de novembro 2011

1. (2P) Considere o cilindro

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 4, \ -1 \leq y \leq 2\}$$

e a função $f(x,y,z) = xy^2z$. Calcule a integral

$$\iint_S f \, \mathrm{dS}.$$

2. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z = 1, \, 0 \leq z \leq 1\},$$

orientada pelo campo normal unitário $\mathbf{N}$ apontando para cima (i.e., $N_3 > 0$), e o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x\mathbf{k}.$$

(a) (1,5P) Calcule $I := \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \, \mathrm{dS}$ usando uma parametrização conveniente de S (sem usar o Teorema de Stokes).

(b) (1P) I coincide com qual integral curvilínea (i.e., uma integral ao longo duma curva C) segundo o Teorema de Stokes? Calcule esta integral curvilínea sem usar o resultado de (a).

(c) (0,5P) $\mathbf{F}$ é conservativo? (Dica: $\operatorname{rot} \circ \nabla = ?$ – Ou use um critério da teoria de integrais curvilíneas.)

3. (2P) Considere a função

$$y(x) = e^{-x} + e^{3x}$$

com domínio $\mathbb{R}$.

Verifique que a função y acima satisfaz a equação diferencial

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$$

e calcule $y(0)$, $y'(0)$ e $y''(0)$.

4. (1,5P) Determine a solução (explícita) y do problema de valor inicial

$$\frac{2}{x} + y + xy' = 0, \quad y(1) = 3.$$

5. (1,5P) Determine a solução (explícita) y do problema de valor inicial

$$y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, \quad y(0) = -1.$$