Cálculo C (03220): Prova 2 Soluções

Prof.: Martin Weilandt

25 de outubro 2011

1. (a) Nós temos que a união S das superfícies $S^1,\ldots,S^4$ é exatamente a fronteira de E (com as orientações $\mathbf{N}^1,\ldots,\mathbf{N}^4$ apontando para fora de E). Agora observamos que

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = x^2 2y - x^2 y = x^2 y = f(x,y,z).$$

Portanto, o Teorema do Divergente implica

$$I_1 = \iiint_E f\,\mathrm{dV} = \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{dV} = \iint_S \mathbf{F}\,\mathrm{dS} = I_2.$$

(b)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^2 \int_{-1}^1 \int_0^{1-y^2} x^2 y \,\mathrm{dz}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} \\ &= \int_0^2 x^2 \int_{-1}^1 (y - y^3)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} = \int_0^2 x^2 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_{y=-1}^1 \mathrm{dx} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c) S^1 é o gráfico da função $g(u,v) = 1 - v^2$, com domínio $D = [0,2] \times [-1,1]$. Observamos $\partial g/\partial u = 0$, $\partial g/\partial v = -2v$ e obtemos (para $\mathbf{R}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (1-v^2)\mathbf{k}$)

$$\begin{aligned} \iint_{S^1} \mathbf{F}\,\mathrm{dS} &= \iint_D (-(F_1 \circ \mathbf{R})\partial g/\partial u - (F_2 \circ \mathbf{R})\partial g/\partial v + F_3 \circ \mathbf{R})\,\mathrm{dA} \\ &= \int_0^2 \int_{-1}^1 (-0 - u^2 v^2(-2v) + u^2 v(1 - v^2))\,\mathrm{dv}\,\mathrm{du} \\ &= \int_0^2 u^2 \int_{-1}^1 (2v^3 + v - v^3)\,\mathrm{dv}\,\mathrm{du} \\ &= \int_0^2 u^2 \left(\frac{v^4}{4} + \frac{v^2}{2}\right)\Big|_{v=-1}^1 \mathrm{dv} = 0 \end{aligned}$$

Para S^2 observamos que para $(x,y,0) \in S^2$ temos $\langle \mathbf{F}(x,y,0), \mathbf{N}^2(x,y,0)\rangle = \langle x^2y^2\mathbf{j}, -\mathbf{k}\rangle = 0$ e, portanto,

$$\iint_{S^2} \mathbf{F}\,\mathrm{dS} = \iint_{S^2} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}^2\rangle\,\mathrm{dS} = 0.$$

Observamos que $\mathbf{N}^3 = \mathbf{i}$ e $\mathbf{N}^4 = -\mathbf{i}$ são perpendiculares a $\mathbf{F}$ e concluimos

$$\iint_{S^3} \mathbf{F}\,\mathrm{dS} = \iint_{S^4} \mathbf{F}\,\mathrm{dS} = 0.$$

Somando os resultados acima, obtemos $I_2 = 0$

2. (a) S é o gráfico de $g(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$ com domínio $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | a^2 \le u^2+v^2 \le b^2\}$. Portanto

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_S \mathrm{dS} = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + 1}\,\mathrm{dA} \\ &= \iint_D \sqrt{\frac{u^2}{u^2+v^2} + \frac{v^2}{u^2+v^2} + 1}\,\mathrm{dA} = \iint_D \sqrt{2}\,\mathrm{dA} \\ &= \sqrt{2}[A(\text{disco de raio } b) - A(\text{disco de raio } a)] = \sqrt{2}\pi(b^2 - a^2) \end{aligned}$$

   (b) Para $a = 1$, $b = 2$ obtemos $A(S) = \sqrt{2}\pi(4-1) = 3\sqrt{2}\pi$.

3. (a) Para $y(x) = x + \frac{1}{C-x}$ verificamos (para todo x diferente de C) que ao lado esquerdo da EDO temos $y'(x) = 1 - (-1)(C-x)^{-2} = 1 + (C-x)^{-2}$. O lado direito da EDO dá $1+(x-y(x))^2 = 1+(x-x-\frac{1}{C-x})^2 = 1 + (-C+x)^{-2}) = 1 + (C-x)^{-2}$. Em outras palavras a função $y(x) = x + \frac{1}{C-x}$ satisfaz a EDO acima.

   (b) $3 = y(1) = 1 + \frac{1}{C-1}$, e portanto $C - 1 = \frac{1}{2}$ e $C = \frac{3}{2}$. A solução do nosso PVI é $y(x) = x + (\frac{3}{2} - x)^{-1}$.

   (c) Escrevemos $f(x,y) = 1+x^2-2xy+y^2$ e observamos que f e $\partial f/\partial y = -2x+2y$ são funções contínuas. O Teorema de Picard implica que a solução de (b) do PVI é única.

4. Separamos variáveis e obtemos $y = e^{x - \operatorname{sen} x}$.

5. Usando que a EDO é exata ou separando variáveis, obtemos $y = -\frac{4}{\cos x}$.