Cálculo C (03220): Prova 2

Prof.: Martin Weilandt

25 de outubro 2011

1. Considere a função
$$f(x,y,z) = x^2 y$$
e o campo vetorial
$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2y^2\mathbf{j} - x^2yz\mathbf{k}.$$
Definimos a região
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 - y^2\}$$
e observamos que a fronteira de E é dada pela união das seguintes superfícies S^1,S^2,S^3,S^4:

$S^1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 1,\ z = 1 - y^2\}$
(orientada pelo campo normal unitário $\mathbf{N}^1$ apontando para cima (i.e. $N_3^1 > 0$))
$S^2 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 1\}$ (orientada por $\mathbf{N}^2 = -\mathbf{k}$)
$S^3 = \{(2,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq y \leq 1,\ z = 1 - y^2\}$ (orientada por $\mathbf{N}^3 = \mathbf{i}$)
$S^4 = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq y \leq 1,\ z = 1 - y^2\}$ (orientada por $\mathbf{N}^4 = -\mathbf{i}$)

Definimos
$$I_1 = \iiint_E f \,\mathrm{dV}$$
$$I_2 = \iint_{S^1} \mathbf{F}\,\mathrm{dS} + \iint_{S^2} \mathbf{F}\,\mathrm{dS} + \iint_{S^3} \mathbf{F}\,\mathrm{dS} + \iint_{S^4} \mathbf{F}\,\mathrm{dS}$$

   (a) (0,5P) Mostre que $I_1 = I_2$ sem usar (b) ou (c). (Dica: Você vai ter de verificar uma relação entre f e $\mathbf{F}$ e citar um teorema.)

   (b) (1P) Calcule I_1 sem usar (a) ou (c).

   (c) (2P) Calcule I_2 sem usar (a) ou (b). (Dica: Você não precisa parametrizar todas as quatro superfícies.)

2. Sejam $0 < a < b$ e considere a superfície

$$S = S_{a,b} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2,\ a \leq z \leq b\}$$

(uma parte dum cone).

(a) (1P) Calcule a área $A(S) = \iint_S \mathrm{dS}$ de S. (Dica: O resultado depende de a e b. Você pode usar a fórmula conhecida para a área dum disco de raio $r > 0$.)

(b) (0,5P) Mostre que para $a = 1$, $b = 2$ temos $A(S) = 3\sqrt{2}\pi$.

3. Considere o problema de valor inicial

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2, \quad y(1) = 3.$$

(a) (1P) Verifique que para qualquer $C \in \mathbb{R}$ a função $y(x) = x + \frac{1}{C-x}$ é uma solução da equação diferencial acima.

(b) (0,5P) Usando (a), determina uma solução (explícita) do nosso problema de valor inicial.

(c) (0,5P) Mostre que a solução de (b) é a única solução do nosso problema de valor inicial (perto de $x = 1$).

4. (1,5P) Determine a solução (explícita) y do problema de valor inicial

$$y' = y \cdot (1 - \cos x), \quad y(0) = 1.$$

5. (1,5P) Determine a solução (explícita) y do problema de valor inicial

$$\operatorname{sen}(x) \cdot y^2 - 2\cos(x) \cdot y \cdot y' = 0, \quad y(0) = -4.$$